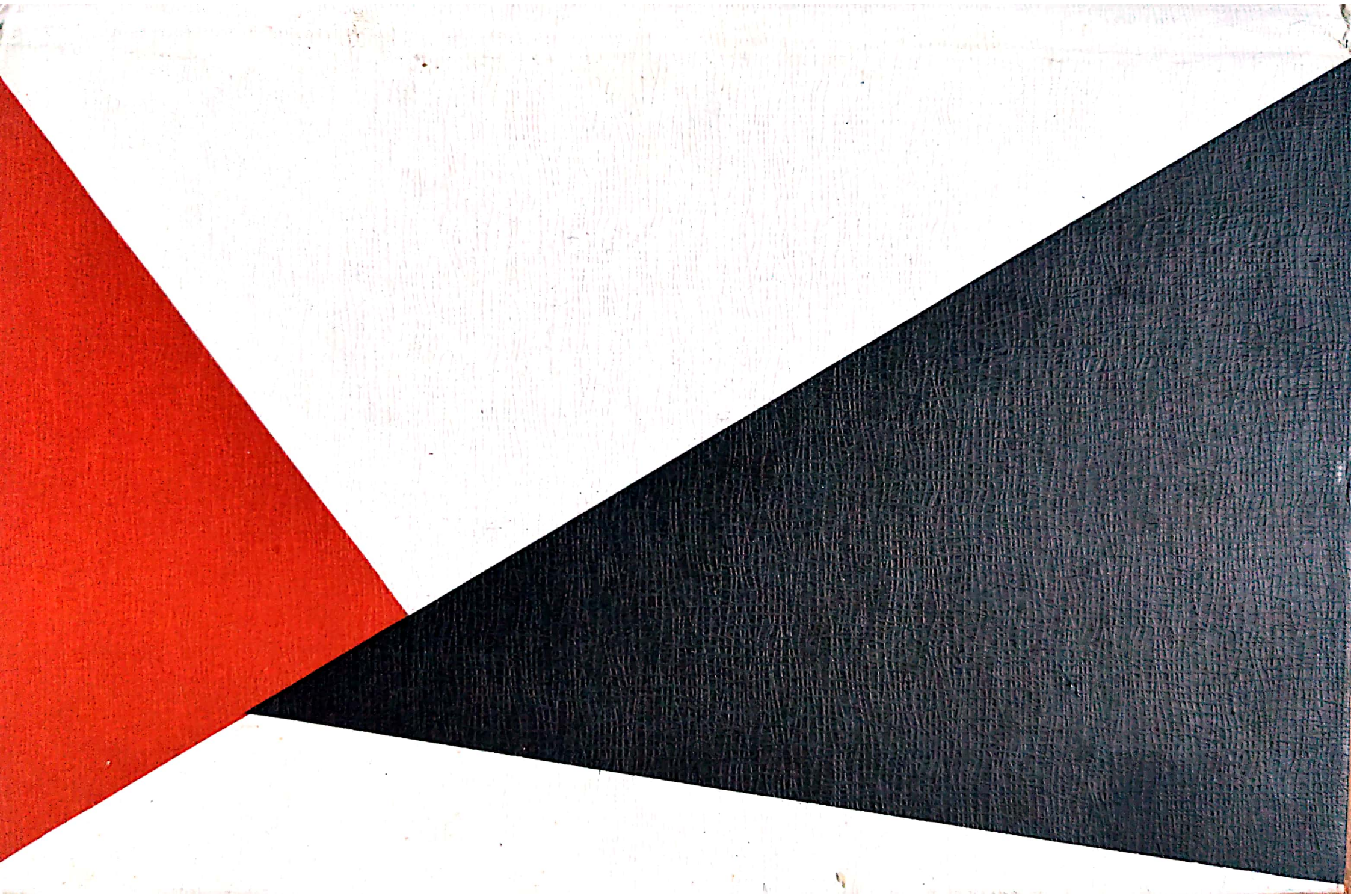


Scanned with OKEN Scanner

Traducere de: SILVIU TELEMAN şi ECATERINA TELEMAN

Coperta şi supracoperta de KLARA TÁMAS

COUNTEREXAMPLES IN ANALYSIS
Holden-Day, Inc., San Francisco, London, Amsterdam, 1964

Scanned with OKEN Scanner

B. R. Gelbaum
Universitatea din California, Irvine

J.M.H. Olmsted
Universitatea din Illinois de sud

Contraexemple în analiză

Editura Științifică

Scanned with OKEN Scanner

Prefață

„Este propoziția S adevărată?", acesta este principalul tip de întrebare care se pune în matematică, propoziția S fiind de forma: Orice membru al clasei A este un membru al clasei B: $A \subset B$". A demonstra că o asemenea afirmație este *adevărată* înseamnă a formula o dovadă a incluziunii $A \subset B$. A demonstra că o asemenea afirmație este *falsă* înseamnă a găsi un element al lui A care *nu* este element al lui B, cu alte cuvinte — a găsi un *contraexemplu*. Pentru ilustrare, dacă propoziția S este: „Orice funcție continuă este diferențiabilă undeva", atunci mulțimile A și B constau din toate funcțiile continue și respectiv din toate funcțiile care sînt undeva diferențiabile; celebrul exemplu al lui Weierstrass de funcție f, continuă, dar nicăieri diferențiabilă (vezi Exemplul 8 din Capitolul 3) este un contraexemplu la incluziunea $A \subset B$, dat fiind că f este element al lui A, dar nu este element al lui B. Cu riscul de a admite o simplificare excesivă, putem spune că matematica (pe lîngă definiții, propoziții și muncă susținută) este formată din două clase — demonstrații și contraexemple — și că descoperirea matematică este orientată către două țeluri principale — formularea de demonstrații și construirea de contraexemple. Majoritatea cărților de matematică se concentrează asupra primei clase, ansamblul demonstrațiilor unor propoziții adevărate. În volumul de față, ne adresăm celei de a doua clase de obiecte matematice, contraexemplele la propoziții false.

Scanned with OKEN Scanner

În general, în matematică, exemplele sînt de două tipuri: exemple ilustrative și contraexemple. Primele exemple arată de ce o afirmație sau alta *are* sens, celelalte — de ce o afirmație sau alta *nu* are sens. Se poate afirma că *orice* exemplu este în același timp un contraexemplu pentru o propoziție anumită, și anume că un asemenea exemplu este imposibil.

Nu vrem să acordăm o interpretare atît de universală termenului *contraexemplu*, dar admitem că semnificația lui este suficient de largă pentru a putea include orice exemplu care nu are rolul de a ilustra o teoremă adevărată. De pildă, un polinom, ca exemplu de funcție continuă, *nu este* un contraexemplu, dar un polinom, ca exemplu de funcție care nu este mărginită, sau care nu este periodică, *este* un contraexemplu. Tot așa, clasa tuturor funcțiilor monotone pe un interval mărginit și închis, gîndite ca o clasă de funcții integrabile, *nu este* un contraexemplu, dar aceeași clasă ca exemplu de spațiu de funcții care nu este spațiu vectorial *este* un contraexemplu.

Această carte a fost scrisă pentru un public larg și variat. Cea mai mare parte a materialului este accesibilă studenților care încă n-au terminat un curs elementar de calcul diferențial și integral și poate fi, de asemenea, utilă cadrelor didactice pentru ilustrarea greșelilor posibile în cursul studierii analizei. Studenții din anii superiori vor găsi în ea subtilități care, de obicei, nu sînt tratate în manuale. Studenții care se pregătesc pentru examenele de diplomă își vor putea completa bagajul de exemple care delimitează teoremele pe care le-au învățat. Sperăm că și specialiștii matematicieni vor găsi demne de atenție unele părți ale cărții.

Contraexemplele prezentate aici se mărginesc, aproape în totalitate, la acea parte a analizei, cunoscută sub numele de „teorie a funcțiilor de variabile reale", pornind de la nivelul calculului diferențial și integral, deși sînt incluse și cîteva exemple din spațiile metrice și topologice și unele care folosesc numerele complexe. Nu avem pretenții de completitudine. Într-adevăr, este probabil că mulți cititori vor constata că unele din exemplele lor favorite lipsesc din această colecție, despre care trebuie să mărturisim că a fost

Scanned with OKEN Scanner

alcătuită din exemplele *noastre* preferate. Unele sînt deliberate și se explică fie din lipsa de spațiu, fie datorită preferințelor noastre, iar altele le regretăm și noi în modul cel mai sincer.

Cartea este gîndită mai ales pentru a fi frunzărită, deși ar putea fi un supliment util pentru mai multe tipuri de cursuri standard. Dacă cititorul găsește că unele părți merg greu, trebuie să sară peste ele și să culeagă ceva nou și stimulator în altă parte a cărții. S-a făcut încercarea de a clasa conținutul în conformitate cu gradul de dificultate sau complexitate în următoarele categorii generale: (*i*) capitolele, (*ii*) temele din capitole, (*iii*) exemplele din teme. Se presupune că cititorul cunoaște problemele atinse în lucrare și, de aceea, în expunerea materialului, se dă un minim de lămuriri. Fiecare capitol are o introducere care fixează notația, terminologia și definițiile, și dă enunțurile celor mai importante teoreme. La sfîrșitul cărții se află o bibliografie bogată la care se fac referiri frecvente în text. Aceste referiri sînt menite atît pentru a ajuta pe cititor în căutarea unor informații suplimentare asupra diferitelor subiecte, cît și pentru a manifesta respectul cuvenit autorilor operelor citate. Dacă lipsește indicația paternității a vreunuia din contraexemple, ne exprimăm sincere regrete. Nici una din aceste omisiuni nu este făcută cu intenție.

În încheiere, ne exprimăm speranța că această carte va fi de folos cititorilor și le va oferi aceeași plăcere pe care au avut-o și autorii la elaborarea ei. Experiența noastră ne dă dreptul să afirmăm că rezolvarea unei probleme matematice este tot atît de captivantă ca și vizionarea unei bune piese de teatru. După părerea noastră, multe din cele mai profunde și elegante descoperiri matematice aparțin acestui gen.

Irvine, California — *B.R.G.*
Carbondale, Illinois — *J.M.H.O.*

Scanned with OKEN Scanner

Lista de simboluri

$\in (\notin)$	aparţine (nu aparţine)
$\subset$	este submulţime, este inclusă în
$\Rightarrow$	implică
$\Leftrightarrow$	dacă şi numai dacă
$\{a, b, c, \ldots\}$	mulţimea formată din elementele a, b, c, ...
$\{\ldots \mid \ldots\}$	mulţimea tuturor ... astfel încît...
$A \cup B$	reuniunea mulţimilor A şi B
$A \cap B$	intersecţia mulţimilor A şi B
$A \setminus B$	diferenţa mulţimilor A şi B
A'	complementara lui A
$\emptyset$	mulţimea vidă
(a, b)	perechea ordonată
$A \times B$	produsul cartezian
$\exists$	există
$\ni$	astfel încît
D_f	domeniul de definiţie al lui f
R_f	domeniul de valori al lui f
f^{-1}	funcţia inversă funcţiei f
$f: A \longrightarrow B$, $A \xrightarrow{f} B$	funcţie $f \ni D_f = A$, $R_f \subset B$.
$f \circ g$	compusa funcţiei f cu funcţia g $((f \circ g)(x) = f(g(x)))$.
$\mathfrak{F}$	cîmp
$\mathfrak{G}$	grup

Scanned with OKEN Scanner

$\mathfrak{P}$	mulțimea elementelor pozitive ale unui cîmp
$<, \leqslant, >, \geqslant$	simboluri pentru relații de ordine
$\|x\|$	valoarea absolută a lui x
$(a, b), [a, b)$ $(a, b], [a, b]$ $(a, +\infty), (-\infty, a)$ $[a, +\infty), (-\infty, a]$ $(-\infty, +\infty)$	intervale ale unui sistem ordonat
$N(a, \varepsilon)$	vecinătate
$D(a, \varepsilon)$	vecinătate punctată
$\max(x, y)$	cel mai mare dintre elementele x, y
$\min(x, y)$	cel mai mic dintre elementele x, y
$\inf(A)$, $\inf A$	marginea inferioară a mulțimii A
$\sup(A)$, $\sup A$	marginea superioară a mulțimii A
$x \leftrightarrow x'$	corespondență biunivocă
$\boldsymbol{R}$	corpul numerelor reale
$\operatorname{sgn} x$	funcție specială
χ_A	funcția caracteristică a mulțimii A
$\boldsymbol{N}$	mulțimea numerelor naturale
$\boldsymbol{Q}$	corpul numerelor raționale
$\mathfrak{B}$	inel
$\mathfrak{D}$	domeniu de integritate
$\boldsymbol{Z}$	inelul întregilor
$\lim_{x \to a} f(x)$	limita unei funcții într-un punct
$\forall$	pentru orice
$f'(a)$	derivata funcției $f(x)$ în punctul $x = a$
$\{a_n\}$	șir
(x, y)	număr complex
$\boldsymbol{C}$	corpul numerelor complexe
$x + iy$	număr complex
$\mathfrak{K}$	cîmpul funcțiilor raționale
Φ	$\{a + b\sqrt{5} \mid a, b \in \boldsymbol{Z}\}$
$m \mid n$	m divide pe n
$\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$, $\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n\right)$	reuniunea (intersecția) familiei numerabile de mulțimi A_1, A_2,...

Scanned with OKEN Scanner

$F(A), I(A), \bar{A}$	frontiera, interiorul, închiderea mulțimii A.
$\{U_\alpha\}$	acoperire deschisă
$[x]$	$\sup \{n \mid n \in \boldsymbol{N},\ n \leqslant x\}$
$\overline{\lim\limits_{x\to a}} f(x)$ $(\underline{\lim\limits_{x\to a}} f(x))$	limita superioară (inferioară) a funcției f în punctul a.
$D\ (\pm\infty, N)$	vecinătate punctată a lui $\pm\infty$
$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$	limita funcției f la $\pm\infty$
$\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$	limite infinite
F_σ	mulțime F_σ
$\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} A_n$ $(\underline{\lim\limits_{n\to+\infty}} A_n)$	limita superioară (inferioară) a șirului de mulțimi $A_1, A_2, \ldots$
$\sum a_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$	serie infinită
(t_{ij})	matrice
$f^{(n)}(x)$	derivata de ordinul n a funcției f, în punctul x
σ-inel	sigma-inel
$\mathbf{A}$	clasă de mulțimi
$\mathbf{C}$	clasa mulțimilor compacte
$x + A$	translatata mulțimii A cu numărul x
$\mathbf{B}$	clasa mulțimilor boreliene
$\mathbf{S}$	σ-inel
$\rho << \sigma$	măsură ρ absolut continuă în raport cu măsura σ
X, $(X, \mathbf{S})$	spațiu cu măsură (măsurabil)
$\widetilde{\mathbf{B}}$	clasa funcțiilor măsurabile Lebesgue
μ	măsură
μ_*, μ^*	măsură interioară (exterioară)
C	mulțimea lui Cantor
$\mathfrak{c}$	puterea continuului
$D(A)$	mulțimea diferențelor (mulțimii A)
$G_\delta, F_{\sigma\delta} \ldots,$	mulțimi G_δ, $F_{\sigma\delta}$, ...

Scanned with OKEN Scanner

$(r + A) \pmod 1$	translaţia (mulţimii A cu numărul r) modulo 1.
Γ	$\{z \mid z \in \boldsymbol{C}, \lvert z \rvert = 1\}$
Γ_0	$\{z \mid z = e^{2\pi i\theta},\ \theta \in \boldsymbol{Q},\ 0 \leqslant \theta < 1\}$
$\mathfrak{s}$, $\tilde{\mathfrak{s}}$	grupul cît Γ / Γ_0, sistem complet de reprezentanţi ai lui $\mathfrak{s}$ în Γ
$\tilde{\mu}$	măsură pe Γ
φ	funcţia lui Cantor
$\lvert I \rvert$	lungimea intervalului I
$\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, f_x, f_{xy} f_1, f_{12}, ...	derivatele parţiale ale funcţiei f
$P\,dx + Q\,dy$	formă diferenţială
$\vec{F}$	cîmp vectorial
E_2	planul euclidian
$d(A, B)$	distanţa dintre mulţimile A şi B
$d(p, q)$	distanţa dintre punctele p şi q
$\delta(A)$	diametrul mulţimii A
$\mathfrak{a}$	număr cardinal infinit
$\mathfrak{f}$	puterea mulţimii tuturor mulţimilor închise din plan
Ψ	primul număr ordinal de putere $\mathfrak{c}$
$A(S)$, $\underline{A}(S)$, $\overline{A}(S)$	aria, aria interioară, aria exterioară a mulţimii plane S
$\mathfrak{R}$	reţea de drepte
(X, d)	spaţiu metric
d	metrică
$d(x, y)$	distanţa dintre punctele x şi y
$(X, \mathcal{O})$	spaţiu topologic
$\mathcal{O}$	mulţimea mulţimilor deschise, topologia
$\mathcal{J}$	topologia indusă
$\mathfrak{M}_x$	sistemul de vecinătăţi
$\{\emptyset, X\}$, 2^X	topologia minimă, discretă

Scanned with OKEN Scanner

$d^*(x, y)$	metrica mărginită echivalentă
$\| \ldots \|$	norma
Ω	primul număr ordinal, corespunzător unei mulțimi nenumerabile
(x, y)	produsul scalar al elementelor x și y
$(f \vee g)(x)$	$\max (f(x), g(x))$
$(f \wedge g)(x)$	$\min (f(x), g(x))$
f^+, f^-	$f \vee 0, (-f) \vee 0$

Scanned with OKEN Scanner

Tabla de materii

Prefață 5
Lista de simboluri 9
Partea întîi. **Funcţii de o variabilă reală** 33

Capitolul 1. **Sistemul numerelor reale**
INTRODUCERE 35
1. Un cîmp infinit care nu poate fi ordonat 47
2. Un cîmp care este cîmp ordonat în două moduri distincte 48
3. Un cîmp ordonat care nu este complet 48
4. Un cîmp ordonat nearhimedean 49
5. Un cîmp ordonat care nu poate fi completat 50
6. Un cîmp ordonat în care mulțimea numerelor raționale nu este densă 51
7. Un cîmp ordonat care este complet în sensul lui Cauchy, dar nu este complet ordonat 51
8. Un domeniu de integritate fără factorizare unică 52
9. Două numere fără cel mai mare divizor comun 53
10. O fracție care nu poate fi simplificată în mod unic 53
11. Funcții continue pe un interval închis și care nu mai au proprietățile obișnuite dacă sistemul de numere nu este complet 53
   a. O funcție continuă pe un interval închis și nemărginită pe acest interval (deci, dat fiind că intervalul este mărginit, funcția nu este uniform continuă pe interval) 54
   b. O funcție continuă și mărginită pe un interval închis, dar care nu este uniform continuă pe interval 54
   c. O funcție uniform continuă (și deci mărginită) pe un interval închis, dar care nu are o valoare maximă pe acest interval 54

Scanned with OKEN Scanner

d. O funcție continuă pe un interval închis, care nu are proprietatea valorii intermediare pe acest interval 54
e. O funcție neconstantă, derivabilă, a cărei derivată se anulează identic pe un interval închis 54
f. O funcție derivabilă care nu satisface teorema lui Rolle (și deci nici teorema mediei) 54
g. O funcție monotonă, uniform continuă și neconstantă, care are proprietatea valorii intermediare și a cărei derivată este identic nulă pe un interval 55

Capitolul 2. **Funcții și limite**

INTRODUCERE 56

1. O funcție nicăieri continuă, a cărei valoare absolută este continuă peste tot 59
2. O funcție continuă într-un singur punct (vezi Exemplul 22) 59
3. Pentru orice mulțime necompactă, o funcție continuă și nemărginită care are mulțimea dată ca domeniu de definiție 59
4. Pentru orice mulțime necompactă, o funcție nemărginită, local mărginită, definită pe mulțimea dată 60
5. O funcție finită peste tot, care nu este nicăieri local mărginită 60
6. Pentru o mulțime necompactă arbitrară, o funcție continuă și mărginită, definită pe mulțimea dată, și care nu are valori extreme 60
7. O funcție mărginită care nu are extreme relative pe un domeniu compact 61
8. O funcție mărginită care nu este nicăieri semicontinuă 61
9. O funcție periodică neconstantă, fără perioadă pozitivă minimă 62
10. O funcție irațională 62
11. O funcție transcendentă 63
12. Funcții $y = f(u)$, $u \in \boldsymbol{R}$, și $u = g(x)$, $x \in \boldsymbol{R}$, pentru care funcția compusă $y = f(g(x))$ este continuă peste tot și astfel încît
$$\lim_{u \to b} f(u) = c, \quad \lim_{x \to a} g(x) = b, \quad \lim_{x \to a} f(g(x)) \neq c$$ 63
13. Două funcții uniform continue al căror produs nu este uniform continuu 64
14. O funcție continuă și biunivocă pe un interval și a cărei inversă nu este continuă 64
15. O funcție continuă în fiecare punct irațional și discontinuă în fiecare punct rațional 65

Scanned with OKEN Scanner

16. O funcţie semicontinuă cu o mulţime densă de puncte de discontinuitate 65
17. O funcţie cu o mulţime densă de puncte de discontinuitate, fiecare din ele fiind de discontinuitate aparentă 65
18. O funcţie monotonă ale cărei puncte de discontinuitate formează o mulţime numerabilă arbitrară (eventual densă) 66
19. O funcţie cu ó mulţime densă de puncte de continuitate şi o mulţime densă de puncte de discontinuitate dintre care nici unul nu este de discontinuitate aparentă 66
20. O corespondenţă biunivocă între două intervale, care nu este nicăieri monotonă 66
21. O funcţie continuă care nu este nicăieri monotonă 67
22. O funcţie ale cărei puncte de discontinuitate formează o mulţime închisă oarecare, dată 68
23. O funcţie ale cărei puncte de discontinuitate formează o mulţime F_σ oarecare, dată. (Vezi Capitolul 4, Exemplul 8 şi Capitolul 8, Exemplele 8, 10 şi 22). 68
24. O funcţie care nu este limita nici unui şir de funcţii continue (Vezi Capitolul 4, Exemplul 10) 69
25. O funcţie definită pe [0, 1] astfel încît imaginea oricărui subinterval nedegenerat al lui [0, 1] este [0, 1]. (Vezi Capitolul 8, Exemplul 27). 70
26. O funcţie liniară discontinuă 72
27. Pentru orice $n \in \boldsymbol{N}$, există $n(2n+1)$ funcţii $\varphi_{ij}(x_j)$, $j = 1,2,\ldots, n$, $i = 1, 2,\ldots, 2n+1$, care satisfac condiţiile:
(*a*) Toate funcţiile $\varphi_{ij}(x_j)$ sînt continue pe [0, 1]
(*b*) Pentru orice funcţie $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, continuă pentru $0 \leqslant x_1, x_2, \ldots, x_n \leqslant 1$ există $2n+1$ funcţii ψ_i, $i = 1, 2,\ldots, 2n+1$, fiecare continuă pe $\boldsymbol{R}$, astfel încît 72

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{2n+1} \psi_i \left(\sum_{j=1}^{n} \varphi_{ij}(x_j) \right)$$

Capitolul 3. **Derivarea**

INTRODUCERE 74

1. O funcţie care nu este o derivată 74
2. O funcţie derivabilă cu derivata discontinuă 75

Scanned with OKEN Scanner

3. O funcție discontinuă care are peste tot o derivată (nu neapărat finită) 75
4. O funcție derivabilă care are un extremum într-un punct în care derivata nu are o schimbare simplă de semn 75
5. O funcție derivabilă a cărei derivată este pozitivă într-un punct, dar care nu este monotonă pe nici o vecinătate a punctului 76
6. O funcție a cărei derivată este finită, dar este nemărginită pe un interval închis 76
7. O funcție a cărei derivată există și este mărginită, dar care nu are extreme (absolute) pe un interval închis 77
8. O funcție continuă peste tot dar nicăieri derivabilă 77
9. O funcție derivabilă care nu satisface teorema mediei 79
10. O funcție de x, indefinit derivabilă, care este pozitivă pentru x pozitiv și care se anulează pentru x negativ 79
11. O funcție indefinit derivabilă, pozitivă în intervalul unitate și nulă în afara lui 80
12. O „funcție de legătură", indefinit derivabilă, egală cu 1 pe $[1, +\infty)$ și egală cu 0 pe $(-\infty, 0]$, strict monotonă pe $[0, 1]$ 80
13. O funcție f monotonă, indefinit derivabilă, cu proprietatea că

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} f'(x) \neq 0$$ 80

Capitolul 4. **Integrala Riemann**

INTRODUCERE 81

1. O funcție mărginită definită pe un interval închis, care nu este integrabilă Riemann pe acest interval 81
2. O funcție integrabilă Riemann care nu are primitivă 82
3. O funcție integrabilă Riemann care nu are primitivă pe nici un interval 82
4. O funcție care are primitivă pe un interval închis dar care nu este integrabilă Riemann pe acest interval. (Vezi Capitolul 8, Exemplul 35.) 82
5. O funcție integrabilă Riemann având o mulțime densă de puncte de discontinuitate 82
6. O funcție f cu proprietatea că $g(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ este derivabilă peste tot, având derivata diferită de $f(x)$ pe o mulțime densă 83

Scanned with OKEN Scanner

7. Două funcții semicontinue, diferite, cu proprietatea că „distanța" dintre ele este nulă 83
8. O funcție integrabilă Riemann, avînd ca mulțime de puncte de discontinuitate o mulțime F_σ arbitrară, dată, de măsură nulă. (Vezi Capitolul 8, Exemplul 22) 84
9. O funcție integrabilă Riemann de o funcție integrabilă Riemann, care nu este integrabilă Riemann. (Vezi Capitolul 8, Exemplul 34) 84
10. O limită a unui șir monoton și mărginită de funcții integrabile Riemann, care nu este integrabilă Riemann. (Vezi Capitolul 8, Exemplul 33.) 85
11. O integrală improprie divergentă care are valoarea principală în sensul lui Cauchy finită 85
12. O integrală improprie convergentă pe $[1, +\infty)$, al cărei integrand este pozitiv, continuu și nu tinde către zero la infinit 85
13. O integrală improprie convergentă pe $[0, +\infty)$, al cărei integrand este nemărginit în fiecare interval de forma $[a, +\infty)$, unde $a > 0$ 86
14. Două funcții f și g cu proprietatea că f este integrabilă Riemann-Stieltjes în raport cu g, atît pe $[a, b]$ cît și pe $[b, c]$, dar nu și pe $[a, c]$ 86

Capitolul 5. **Șiruri**

INTRODUCERE 88
1. Șiruri mărginite divergente 88
2. Un șir a cărui mulțime de puncte limită este o mulțime oarecare, închisă, dată 89
3. Un șir divergent $\{a_n\}$, pentru care $\lim_{n\to+\infty} (a_{n+p} - a_n) = 0$ pentru orice întreg pozitiv p 90
4. Fiind dat un șir arbitrar strict crescător $\{\varphi_n\} = \{\varphi(n)\}$ de întregi pozitivi, există un șir divergent $\{a_n\}$ cu proprietatea că 91
$$\lim_{n\to+\infty} (a_{\varphi(n)} - a_n) = 0$$
5. Șiruri $\{a_n\}$ și $\{b_n\}$ cu proprietățile 92
$$\underline{\lim}\, a_n + \underline{\lim}\, b_n < \underline{\lim}\ (a_n + b_n) < \underline{\lim}\, a_n + \overline{\lim}\, b_n <$$
$$< \overline{\lim}\ (a_n + b_n) < \overline{\lim}\ a_n + \overline{\lim}\ b_n$$

Scanned with OKEN Scanner

6. Şiruri $\{a_{1n}\}$, $\{a_{2n}\}$, ..., cu proprietăţile 92

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\,(a_{1n}+a_{2n}+\ldots) > \overline{\lim_{n\to+\infty}}\,a_{1n} + \overline{\lim_{n\to+\infty}}\,a_{2n} + \ldots$$

7. Două şiruri uniform convergente de funcţii pentru care şirul produs nu converge uniform 93
8. Un şir divergent de mulţimi 93
9. Un şir $\{A_n\}$ de mulţimi care converge către mulţimea vidă, dar ale căror numere cardinale $\to +\infty$ 94

Capitolul 6. **Serii infinite**

INTRODUCERE 95

1. O serie divergentă al cărei termen general tinde către zero 96
2. O serie convergentă Σa_n şi o serie divergentă Σb_n cu proprietatea că $a_n \geqslant b_n$, $n = 1, 2, \ldots$ 96
3. O serie convergentă Σa_n şi o serie divergentă Σb_n cu proprietatea că $|a_n| \geqslant |b_n|$, $n = 1, 2, \ldots$ 96
4. Pentru o serie pozitivă, arbitrară, dată, o serie dominată divergentă sau o serie dominantă convergentă 96
5. O serie convergentă cu o rearanjare divergentă 97
6. Pentru o serie arbitrară Σa_n, semiconvergentă, şi pentru un număr real arbitrar x, un şir $\{\varepsilon_n\}$, unde $|\varepsilon_n| = 1$, pentru $n = 1, 2, \ldots$ astfel ca $\Sigma\, \varepsilon_n a_n = x$ 98
7. Serii divergente care satisfac oricare pereche de condiţii din grupul de trei condiţii ale teoremei seriilor alternate 99
8. O serie divergentă al cărei termen general tinde către zero şi care, au o introducere adecvată de paranteze, converge către o sumă arbitrară 100
9. Pentru un şir pozitiv dat $\{b_n\}$ a cărei limită inferioară este zero, o serie pozitivă divergentă Σa_n al cărei termen general tinde către zero, astfel încît $\lim_{n\to+\infty} a_n/b_n = 0$ 100
10. Pentru un şir pozitiv dat (b_n), cu limita inferioară zero, o serie pozitivă convergentă Σa_n cu proprietatea că $\lim_{n\to+\infty} a_n/b_n = +\infty$
11. Pentru un şir pozitiv $\{c_n\}$ a cărui limită inferioară este zero, o serie pozitivă convergentă Σa_n şi o serie pozitivă divergentă Σb_n, astfel ca $a_n/b_n = c_n$, $n = 1, 2, \ldots$ 101

Scanned with OKEN Scanner

12. O funcție pozitivă și continuă pentru $x \geqslant 1$, cu proprietatea că $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ este convergentă, iar $\sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$ este divergentă 101
13. O funcție pozitivă și continuă pentru $x \geqslant 1$, cu proprietatea că $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ este divergentă, iar $\sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$ este convergentă 102
14. Serii pentru care criteriul raportului nu este eficient 102
15. Serii pentru care criteriul radicalului nu este eficient 104
16. Serii pentru care criteriul radicalului este eficient, dar cel al raportului nu este 105
17. Două serii convergente pentru care produsul Cauchy este divergent 106
18. Două serii divergente pentru care produsul Cauchy este serie absolut convergentă 107
19. Pentru un șir dat $\left\{\sum_{m=1}^{+\infty} a_{mn}\right\}$, $n = 1, 2, \ldots$, de serii pozitive convergente, o serie pozitivă convergentă $\sum_{m=1}^{+\infty} a_m$ care nu se compară favorabil cu nici una din seriile $\left\{\sum_{m=1}^{+\infty} a_{mn}\right\}$ 107
20. O matrice Toeplitz T și un șir divergent transformat de T într-un șir convergent 110
21. Pentru o matrice Toeplitz $T = (t_{ij})$, dată, există un șir $\{a_j\}$, $a_j = \pm 1$ pentru orice j, astfel încît șirul transformat $\{b_i\}$ al lui $\{a_j\}$ prin T este divergent 111
22. O serie de puteri convergentă într-un singur punct. (Vezi Exemplul 24.) 114
23. O funcție a cărei serie MacLaurin converge peste tot, dar care reprezintă funcția într-un singur punct 114
24. O funcție a cărei serie MacLaurin converge într-un singur punct 115
25. O serie trigonometrică convergentă, care nu este o serie Fourier 118
26. O funcție $f(x)$ indefinit derivabilă cu proprietatea $\lim_{|x|\to+\infty} f(x) = 0$ și care nu este transformata Fourier a nici unei funcții integrabile Lebesgue 119

Scanned with OKEN Scanner

27. Pentru o mulțime numerabilă oarecare $E \subset [-\pi, \pi]$, o funcție continuă a cărei serie Fourier este divergentă în fiecare punct al lui E și convergentă în fiecare punct al lui $[-\pi, \pi] \setminus E$ 121

28. O funcție integrabilă (Lebesgue) pe $[-\pi, \pi]$ a cărei serie Fourier diverge peste tot 122

29. Un șir $\{a_n\}$ de numere raționale cu proprietatea că pentru orice funcție f, continuă pe $[0, 1]$ și care se anulează în 0 ($f(0) = 0$), există un șir strict crescător $\{n_\nu\}$ de întregi pozitivi, astfel încît (cu $n_0 = 0$) să avem

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=n_\nu+1}^{n_{\nu+1}} a_n x^n \right),$$

convergența fiind uniformă pe $[0, 1]$ 122

Capitolul 7. **Convergența uniformă**

INTRODUCERE 125

1. Un șir de funcții discontinue peste tot care converge uniform către o funcție continuă peste tot 125
2. Un șir de funcții indefinit derivabile care converge uniform către zero și pentru care șirul derivatelor diverge peste tot 125
3. O limită neuniformă și nemărginită de funcții mărginite 126
4. O limită neuniformă de funcții continue, care nu este continuă 126
5. O limită neuniformă de funcții integrabile Riemann, care nu este integrabilă Riemann. (Vezi Capitolul 8, Exemplul 33.) 128
6. Un șir de funcții pentru care limita integralelor nu este egală cu integrala limitei 129
7. Un șir de funcții pentru care limita derivatelor nu este egală cu derivata limitei 130
8. O convergență uniformă pe orice subinterval închis, dar neuniformă pe întreg intervalul 130
9. Un șir $\{f_n\}$, care converge uniform către zero pe $[0, +\infty)$, dar este astfel încît

$$\int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx \not\to 0$$ 130

Scanned with OKEN Scanner

10. O serie care converge neuniform, dar al cărei termen general tinde uniform către zero 131
11. Un şir care converge neuniform, dar care conţine un subşir uniform convergent 131
12. Şiruri neuniform convergente care satisfac oricare trei din cele patru condiţii ale teoremei lui Dini 131

Capitolul 8. **Mulţimi şi măsură pe axa reală** 133

INTRODUCERE 133

1. O mulţime perfectă nicăieri densă 135
2. O mulţime nenumerabilă de măsură nulă 137
3. O mulţime de măsură nulă, a cărei mulţime diferenţă conţine o vecinătate a originii 138
4. Mulţimi perfecte, nicăieri dense, de măsură pozitivă 140
5. O mulţime perfectă, nicăieri densă, de numere iraţionale 141
6. O mulţime densă, deschisă, a cărei complementară nu are măsura nulă 142
7. O mulţime de categoria a doua 142
8. O mulţime care nu este o mulţime F_σ 143
9. O mulţime care nu este o mulţime G_δ 143
10. O mulţime A care nu poate fi mulţime a punctelor de discontinuitate a unei funcţii 144
11. O mulţime nemăsurabilă 144
12. O mulţime D, cu proprietatea că pentru orice mulţime măsurabilă A, $\mu_*(D \cap A) = 0$ şi $\mu^*(D \cap A) = \mu(A)$ 147
13. O mulţime A de măsură nulă cu proprietatea că orice număr real este un punct de condensare al lui A 147
14. O mulţime A de numere reale, nicăieri densă, şi o aplicaţie continuă a lui A pe intervalul închis [0, 1] 148
15. O funcţie continuă şi monotonă a cărei derivată se anulează aproape peste tot 149
16. O aplicaţie topologică a unui interval închis, care distruge atît măsurabilitatea cît şi măsura nulă 152
17. O mulţime măsurabilă neboreliană 152

Scanned with OKEN Scanner

18. Două funcții continue care nu diferă printr-o constantă, dar care au derivate identice peste tot (în sensul finit sau infinit) 152
19. O mulțime din [0, 1], de măsură 1 și de categoria întîi 153
20. O mulțime din [0, 1], de măsură nulă și de categoria a doua 154
21. O mulțime de măsură nulă care nu este o mulțime F_σ 154
22. O mulțime de măsură nulă pentru care nu există nici o funcție — integrabilă Riemann sau nu — avînd mulțimea dată ca mulțime a punctelor de discontinuitate 155
23. Două mulțimi perfecte, homeomorfe, nicăieri dense în [0, 1], dintre care numai una este de măsură nulă 155
24. Două mulțimi de numere reale, disjuncte, nevide, nicăieri dense, cu proprietatea că fiecare punct al fiecărei mulțimi este punct limită al celeilalte 156
25. Două mulțimi homeomorfe de numere reale, de categorii diferite 157
26. Două mulțimi homeomorfe de numere reale astfel încît una este densă și cealaltă este nicăieri densă 158
27. O funcție definită pe $\boldsymbol{R}$, egală cu zero aproape peste tot și al cărei domeniu de valori este $\boldsymbol{R}$ pe orice interval deschis nevid 159
28. O funcție pe $\boldsymbol{R}$, al cărei grafic este dens în plan 160
29. O funcție f cu proprietatea că $0 \leqslant f(x) < +\infty$ peste tot, dar este astfel încît

$$\int_a^b f(x)\, dx = +\infty$$

pentru orice interval deschis nevid (a, b) 160
30. O funcție continuă, strict monotonă, a cărei derivată se anulează aproape peste tot 161
31. O funcție mărginită și semicontinuă, care nu este nici integrabilă Riemann, nici echivalentă cu o funcție integrabilă Riemann 161
32. O funcție măsurabilă și mărginită, care nu este echivalentă cu o funcție integrabilă Riemann 161
33. O limită mărginită și monotonă de funcții continue, care nu este integrabilă Riemann și nici echivalentă cu o funcție integrabilă Riemann. (A se vedea Capitolul 4, Exemplul 10.) 161
34. O funcție f, integrabilă Riemann, și o funcție g, continuă, ambele definite pe [0, 1] astfel încît funcția compusă $f(g(x))$ nu este nici integrabilă Riemann pe [0, 1] și nici nu este echivalentă cu o funcție integrabilă Riemann pe acest interval. (Vezi Capitolul 4, Exemplul 9.) 162

Scanned with OKEN Scanner

35. O funcție mărginită care are primitivă pe un interval închis, dar care nu este integrabilă Riemann pe acest interval 163
36. O funcție a cărei integrală (Riemann) improprie există, dar a cărei integrală Lebesgue nu există 164
37. O funcție măsurabilă Lebesgue, dar nemăsurabilă Borel 165
38. O funcție $f(x)$ măsurabilă și o funcție $g(x)$ continuă, cu proprietatea că funcția compusă $f(g(x))$ nu este măsurabilă 165
39. O funcție $g(x)$ continuă și monotonă și o funcție $f(x)$ continuă, astfel încît 165

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}g(x) \neq \int_0^1 f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x$$

40. Șiruri de funcții care converg în moduri diferite 166
41. Două măsuri μ și ν pe un spațiu măsurabil $(X, \mathbf{S})$ cu proprietatea că μ este absolut continuă în raport cu ν și pentru care nu există nici o funcție f astfel ca 168

$$\mu(E) = \int_E f(x)\,\mathrm{d}\nu(x) \text{ pentru orice } E \in \mathbf{S}$$

Partea a doua. **Mai multe dimensiuni** 171

Capitolul 9 **Funcții de două variabile** 173

INTRODUCERE . 173
1. O funcție discontinuă de două variabile, separat continuă în raport cu fiecare variabilă 173
2. O funcție de două variabile care nu are limită în origine, dar care tinde spre zero de-a lungul oricărei drepte 174
3. O rafinare a exemplului precedent 174
4. O funcție discontinuă (și deci nediferențiabilă) de două variabile care are peste tot derivate parțiale de ordinul întîi 175
5. Funcții f pentru care există și sînt egale numai două din următoarele limite: 175

$$\lim_{(x,\,y)\to(a,\,b)} f(x, y), \quad \lim_{x\to a}\lim_{y\to b} f(x, y), \quad \lim_{y\to b}\lim_{x\to a} f(x, y)$$

6. Funcții f pentru care există numai una din următoarele limite: 176

$$\lim_{(x,\,y)\to(a,\,b)} f(x, y), \quad \lim_{x\to a}\lim_{y\to b} f(x, y), \quad \lim_{y\to b}\lim_{x\to a} f(x, y)$$

Scanned with OKEN Scanner

7. O funcție f pentru care

$$\lim_{x\to a}\lim_{y\to b} f(x, y) \quad \text{și} \quad \lim_{y\to b}\lim_{x\to a} f(x, y)$$

există și nu sînt egale 177

8. O funcție $f(x, y)$ pentru care $\lim_{y\to 0} f(x, y) = g(x)$ există uniform în raport cu x, $\lim_{x\to 0} f(x, y) = h(y)$ există uniform în raport cu y, $\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{y\to 0} h(y)$, dar $\lim_{(x, y)\to(0, 0)} f(x, y)$ nu există 177

9. O funcție diferențiabilă de două variabile, care nu este continuu diferențiabilă 178

10. O funcție diferențiabilă ale cărei derivate parțiale mixte de ordinul doi nu sînt egale 179

11. O funcție f continuu diferențiabilă, de două variabile x și y și o regiune plană R, cu proprietatea că $\partial f/\partial y$ se anulează identic în R, dar f nu este independentă de y în R. 180

12. O funcție neomogenă, continuu diferențiabilă, de două variabile, local omogenă 181

13. O funcție diferențiabilă de două variabile, care nu are extremum în origine, dar a cărei restricție la orice dreaptă care trece prin origine are în acest punct un minim relativ strict 182

14. O rafinare a exemplului precedent 182

15. O funcție f pentru care

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^b f(x, y)\,\mathrm{d}y \neq \int_a^b \left[\frac{\partial}{\partial x} f(x, y)\right]\mathrm{d}y,$$

deși fiecare integrală este proprie 183

16. O funcție f pentru care

$$\int_0^1\int_0^1 f(x, y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \neq \int_0^1\int_0^1 f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

deși fiecare integrală este proprie 184

17. O serie dublă $\sum_{m,n} a_{mn}$ pentru care

$$\sum_m\sum_n a_{mn} \neq \sum_n\sum_m a_{mn},$$

deși seriile sînt convergente 185

Scanned with OKEN Scanner

18. O diferențială $P\,dx + Q\,dy$ și o regiune plană R în care $P dx + Q dy$ este local exactă, dar nu exactă 185
19. Un cîmp vectorial solenoidal definit într-o regiune simplu conexă și care nu are potențial vectorial 187

Capitolul 10. **Mulțimi plane**

INTRODUCERE 189

1. Două mulțimi închise disjuncte, situate la distanță nulă. 192
2. O mulțime plană mărginită, care nu este conținută într-un disc închis minim 192
3. Mulțimi conexe „subțiri", care nu sînt arce simple 192
4. Două circuite plane disjuncte conținute într-un pătrat și care unesc ambele perechi de vîrfuri opuse 193
5. O aplicație a intervalului [0, 1] pe pătratul $[0, 1] \times [0, 1]$ 194
6. Un arc plan care umple un pătrat 195
7. Un arc care umple un pătrat și este situat aproape peste tot într-o mulțime numerabilă 197
8. Un arc care umple un pătrat și este aproape peste tot diferențiabil 197
9. O aplicație continuă a lui [0, 1] pe [0, 1] care ia fiecare valoare de o mulțime nenumerabilă de ori 197
10. Un arc simplu din pătratul unitate, de măsură plană oricît de apropiată de 1 198
11. O mulțime conexă și compactă care nu este un arc 200
12. O regiune plană, care nu coincide cu interiorul închiderii ei 200
13. Trei regiuni plane disjuncte care au frontiera comună 202
14. O regiune nejordaniană, care coincide cu interiorul închiderii ei 203
15. O regiune plană mărginită a cărei frontieră are măsura pozitivă 203
16. Un arc simplu de lungime infinită 204
17. Un arc simplu de lungime infinită care are tangentă în fiecare punct 204
18. Un arc simplu a cărui lungime este infinită între orice pereche de puncte distincte de pe arc 205
19. O curbă netedă C care conține un punct P, care nu este niciodată cel mai apropiat punct al lui C, pentru nici un punct de pe partea concavă a lui C 205

Scanned with OKEN Scanner

20. O submulțime A a pătratului unitate $S = [0, 1] \times [0, 1]$, densă în S și cu proprietatea că orice dreaptă verticală sau orizontală care intersectează pe S, intersectează pe A într-un singur punct 206
21. O mulțime plană nemăsurabilă care are cel mult două puncte comune cu orice dreaptă 207
22. O funcție nenegativă de două variabile $f(x, y)$ cu proprietatea

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x, y)\, dx\, dy = \int_0^1 \int_0^1 f(x, y)\, dy\, dx = 0$$

și astfel încît

$$\iint_S f(x, y)\, dA, \quad \text{unde } S = [0, 1] \times [0, 1], \text{ nu există} \qquad 210$$

23. O funcție cu valori reale, de o variabilă reală, al cărei grafic este o mulțime plană nemăsurabilă 210
24. O mulțime conexă care devine total discontinuă prin înlăturarea unui singur punct 211

Capitolul 11. **Aria**

INTRODUCERE 213
1. O mulțime plană, mărginită, fără arie 215
2. O mulțime plană, compactă, fără arie 215
3. O regiune plană, mărginită, fără arie 215
4. O regiune Jordan plană și mărginită fără arie 215
5. O curbă simplă închisă a cărei măsură plană este mai mare decît cea a regiunii mărginite pe care o închide
6. Două funcții φ și ψ, definite pe $[0, 1]$, cu proprietățile:

   (*a*) $\varphi(x) < \psi(x)$ pentru $x \in [0, 1]$,

   (*b*) $\int_0^1 [\psi(x) - \varphi(x)]\, dx$ există și este egală cu 1,

   (*c*) $S = \{(x, y)/0 \leqslant x \leqslant 1, \varphi(x) < y < \psi(x)\}$ nu are arie 216
7. O metodă de a atribui o arie finită, oricît de mare, sau infinită, suprafeței laterale a unui cilindru circular drept 217

Scanned with OKEN Scanner

8. Pentru două numere pozitive ε și M, o suprafață S din spațiul tridimensional cu proprietățile:
(*a*) S este homeomorfă cu suprafața unei sfere,
(*b*) Aria lui S există și este mai mică decît ε,
(*c*) Măsura Lebesgue tridimensională a lui S există și este mai mare decît M 219
9. O mulțime plană de măsură plană arbitrar de mică, în interiorul căreia direcția unui segment de dreaptă, de lungime unitate, poate fi inversată printr-o mișcare continuă 220

Capitolul 12. **Spații metrice și topologice**

INTRODUCERE 221

1. Un șir descrescător de mulțimi nevide, închise și mărginite, cu intersecția vidă 226
2. Un spațiu metric incomplet cu topologia discretă 226
3. Un șir descrescător de sfere nevide și închise într-un spațiu metric complet, cu intersecția vidă 227
4. O sferă deschisă O și o sferă închisă B, cu același centru și aceeași rază, dar cu $B \neq \bar{O}$ 228
5. Sfere închise B_1 și B_2, cu razele respectiv r_1 și r_2, astfel ca $B_1 \subset B_2$ și $r_1 > r_2$ 228
6. Un spațiu topologic X și o submulțime Y, cu proprietatea că mulțimea punctelor limită ale lui Y nu este închisă 229
7. Un spațiu topologic în care limitele șirurilor nu sînt unice 229
8. Un spațiu separabil cu un subspațiu neseparabil 229
9. Un spațiu separabil care nu satisface a doua axiomă de numerabilitate 230
10. Două topologii distincte, într-o mulțime dată, care au aceleași șiruri convergente 230
11. Un spațiu topologic X, o mulțime $A \subset X$ și un punct limită al lui A, care nu este limita nici unui șir din A 234
12. Un spațiu topologic X ale cărui puncte sînt funcții, a cărui topologie corespunde convergenței punctuale și care nu este metrizabil 237
13. O aplicație continuă a unui spațiu topologic pe un altul, care nu este nici deschisă, nici închisă 237

Scanned with OKEN Scanner

14. O aplicație a unui spațiu topologic pe un altul, care este deschisă și închisă, dar nu este continuă 238
15. O aplicație a unui spațiu topologic pe un altul, care este închisă, dar nu este nici continuă, nici deschisă 238
16. O aplicație a unui spațiu topologic pe un altul, care este continuă și deschisă, dar nu este închisă 239
17. O aplicație a unui spațiu topologic pe un altul, care este deschisă, dar nu este nici continuă, nici închisă 239
18. O aplicație a unui spațiu topologic pe un altul, care este continuă și închisă, dar nu este deschisă 240
19. Un spațiu topologic X și un subspațiu Y în care există două mulțimi deschise disjuncte, care nu pot fi obținute ca intersecții ale lui Y cu mulțimi deschise disjuncte din X 240
20. Două spații topologice nehomeomorfe, fiecare fiind imaginea continuă și biunivocă a celuilalt 240
21. O descompunere a unei sfere euclidiene tridimensionale B în cinci submulțimi disjuncte S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 (unde S_5 este formată dintr-un singur punct) și 5 mișcări rigide R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, astfel încît

$$B \cong R_1(S_1) \cup R_2(S_2) \cong R_3(S_3) \cup R_4(S_4) \cup R_5(S_5).$$ 242

22. Pentru $\varepsilon, M > 0$, două sfere euclidiene B_ε și B_M de raze respectiv ε și M, o descompunere a lui B_ε într-un număr finit de submulțimi disjuncte $S_1, S_2, \ldots, S_n$ și n mișcări rigide $R_1, R_2, \ldots R_n$, astfe lîncît

$$B_M = R_1(S_1) \cup R_2(S_2) \cup \ldots \cup R_n(S_n)$$ 242

Capitolul 13. **Spații de funcții**

INTRODUCERE 243
1. Două funcții monotone a căror sumă nu este monotonă 246
2. Două funcții periodice a căror sumă nu este periodică 247
3. Două funcții semicontinue, a căror sumă nu este semicontinuă 247
4. Două funcții ale căror pătrate sînt integrabile Riemann, dar pentru care pătratul sumei nu este integrabil Riemann 249

Scanned with OKEN Scanner

5. Două funcții ale căror pătrate sînt integrabile Lebesgue, dar pentru care pătratul sumei nu este integrabil Lebesgue 249
6. Un spațiu de funcții care este un spațiu liniar, dar nu este nici algebră, nici latice 250
7. Un spațiu liniar de funcții care este o algebră, dar nu este o latice 250
8. Un spațiu liniar de funcții care este o latice, dar nu este o algebră 251
9. Două metrici pentru spațiul $C([0, 1])$ al funcțiilor continue pe [0,1], cu proprietatea că complementara sferei unitate în una din metrici este densă în sfera unitate față de cealaltă metrică 251

Bibliografie 253
Index 257

Scanned with OKEN Scanner

Scanned with OKEN Scanner

Partea întîi

Funcţii de o variabilă reală

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul 1

Sistemul numerelor reale

Introducere

Începem prin a prezenta cîteva definiții și notații fundamentale în analiză, esențiale pentru acest prim capitol. Ele vor fi date într-o formă prescurtată și însoțite de un minim de lămuriri. Pentru o tratare mai detaliată pot fi consultate lucrările [16], [21], [22] și [30], menționate în bibliografie.

Dacă A este o mulțime oarecare de obiecte, afirmația că *a este un element al lui A* se scrie $a \in A$. Afirmația contrară că *a nu* este un element al lui A se scrie $a \notin A$. Dacă A și B sînt mulțimi, afirmația *A este o submulțime a lui B* se scrie $A \subset B$ și este echivalentă cu implicația: $x \in A$ *implică* $x \in B$, scrisă și $x \in A \Rightarrow x \in B$. Expresia *dacă și numai dacă* este notată cu simbolul $\Leftrightarrow$. Mulțimea ale cărei elemente sînt $a, b, c, \ldots$ este desemnată prin $\{a, b, c, \ldots\}$. Cu notația $\{\ldots|\ldots\}$ este indicată mulțimea al cărei element general este scris între prima acoladă și bara verticală și a cărei proprietate definitorie (sau proprietăți definitorii) sînt notate între bara verticală și a doua acoladă. **Reuniunea** și **intersecția** a două mulțimi A și B pot fi definite deci ca:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ sau } x \in B\},$$

$$A \cap B = \{x \mid x \in A,\ x \in B\},$$

virgula din ultima formulă înlocuiește pe *și*. Pentru comoditate, elementele unei mulțimi vor fi numite adeseori și *puncte*. **Diferența** dintre mulțimile A și B se notează $A \setminus B$ și este definită de

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A,\ x \notin B\}.$$

Cînd este indicată clar o mulțime S, numită și *mulțimea totală* sau *spațiu* sau *universul discursului*, sau cînd această mulțime este limpede subînțeleasă, diferența $S \setminus A$ se numește **complementara** lui A și este notată A'. În general, diferența $A \setminus B$ se numește **complementara lui B față de A**.

Dacă A și B sînt două mulțimi nevide (nici A nici B nu este mulțimea vidă $\emptyset$), *produsul lor cartezian* este mulțimea tuturor perechilor ordonate (a,b), unde $a \in A$ și $b \in B$, și este notat

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, \quad b \in B\}.$$

Dacă $(a, b) \in A \times B$, a este **prima coordonată** sau **componentă** a lui (a, b) și b este **a doua coordonată** sau **componentă** a lui (a, b). Orice submulțime ρ a lui $A \times B$ se numește o **relație de la A la B**. Se numește **funcție** din A în B o relație f de la A la B cu proprietatea că pentru orice pereche de elemente distincte din f primele coordonate nu coincid. Dacă expresia *există* este notată cu *cuantificatorul de existență* $\exists$, și cuvintele *astfel încît* sînt reprezentate prin simbolul $\ni$, atunci **domeniul de definiție** $D = D_f$ și **domeniul valorilor** $R = R_f$ al unei funcții pot fi definite prin:

$$D = D_f = \{x \mid \exists\, y \ni (x, y) \in f\},$$

$$R = R_f = \{y \mid \exists x \ni (x, y) \in f\}.$$

f este o **funcție de pe A în B**, dacă și numai dacă f este o funcție din A în B avînd domeniul de definiție egal cu A. Funcția f este o **funcție de pe A pe B**, dacă și numai dacă f este o funcție de pe A în B, avînd domeniul valorilor egal cu B. Funcția f este o **corespondență biunivocă** între elementele lui A și elementele lui B, dacă și numai dacă f este o funcție de pe A pe B, astfel încît nici o pereche de elemente distincte ale lui f nu au aceeași a doua coordonată. **Valorile** unei funcții f sînt elementele domeniului valorilor. Inversa f^{-1} a unei corespondențe biunivoce f se obține permutînd domeniul de definiție al lui f cu domeniul valorilor ei:

$$f^{-1} = \{(x, y) \mid (y, x) \in f\}.$$

Scanned with OKEN Scanner

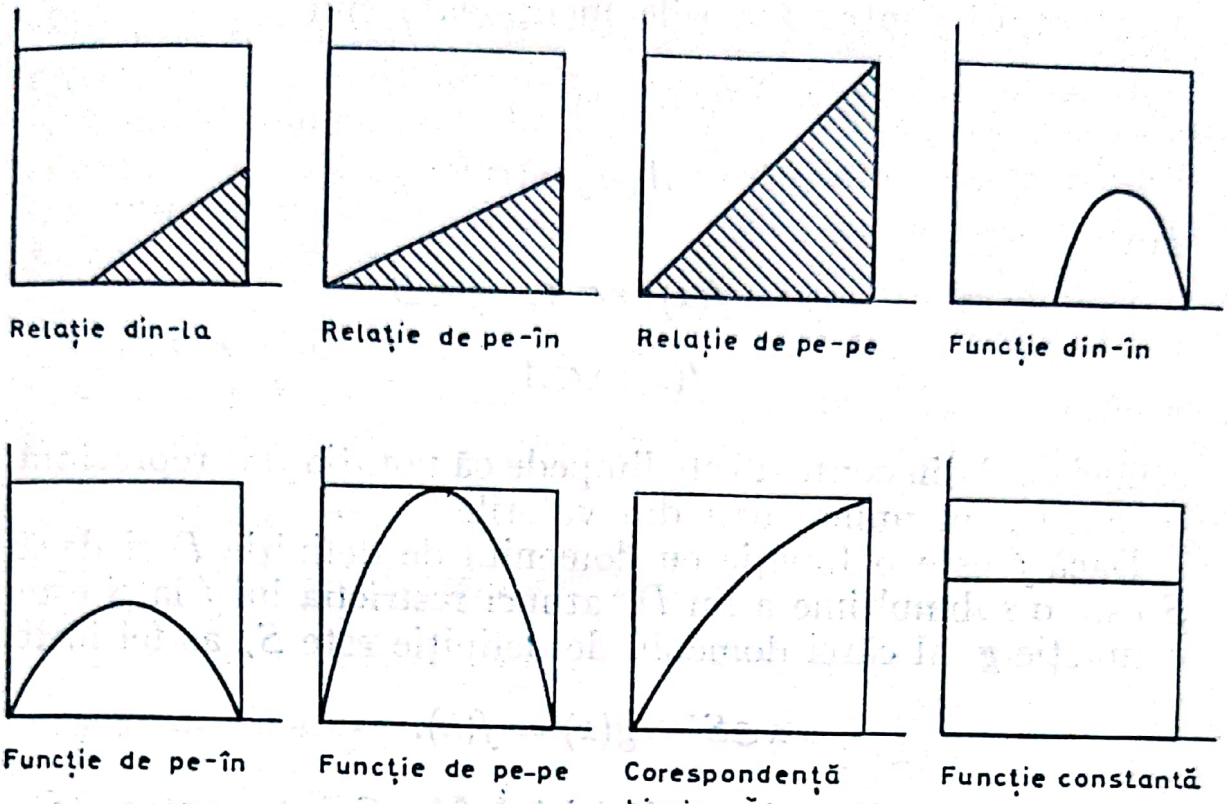


Fig. 1

O **funcție constantă** este o funcție pentru care domeniul valorilor este format dintr-un singur punct.

Diferitele tipuri de relații și de funcții sînt indicate în fig.1. În fiecare caz ca mulțimi A și B a fost ales intervalul închis $[0,1]$ format din toate numerele reale x, astfel încît $0 \leqslant x \leqslant 1$.

Fie f o (aplicație) funcție de pe A în B, scrisă simbolic în următoarele două moduri:

$$f: A \to B,$$

$$A \xrightarrow{f} B.$$

Dacă x este un element oarecare al lui A, atunci există numai un element $y \in B$ astfel încît $(x, y) \in f$. Acest element y al lui B se scrie:

$$y = f(x).$$

Scanned with OKEN Scanner

Alte notații pentru funcțiile menționate sînt

$$f: y = f(x), \quad x \in A, \quad y \in B;$$

$$f: x \in A, \quad f(x) \in B;$$

sau

$$y = f(x): x \in A, \quad y \in B,$$

$$f(x): x \in A,$$

atunci cînd din context este limpede că notația $f(x)$ reprezintă o *funcție*, nu numai una din valorile ei.

Dacă f este o funcție cu domeniul de definiție D și dacă S este o submulțime a lui D, atunci **restricția** lui f la S este o funcție g, al cărei domeniu de definiție este S, astfel încît

$$x \in S \Rightarrow g(x) = f(x).$$

Domeniul valorilor al restricției lui f la S este notat $f(S)$. Adică

$$f(S) = \{y \mid \exists\, x \in S \ni f(x) = y\}.$$

Dacă g este o restricție a lui f, atunci f este numit o **prelungire** (extindere) a lui g.

Dacă f și g sînt funcții astfel încît domeniul valorilor lui g este o submulțime a domeniului de definiție al lui f, atunci **funcția compusă** a lui f cu g, notată $f \circ g$, este o funcție a cărei valoare în punctul x al domeniului de definiție al lui g este $f(g(x))$; pe scurt, *funcția* $y = f(g(x))$ se numește funcția compusă a *funcției* $f(u)$ și a *funcției* $u = g(x)$. (De observat că funcția compusă a lui f și g nu este în general aceeași cu funcția compusă a lui g cu f; contraexemplu: $(x+1)^2 \neq x^2 + 1$.)

Dacă A este o mulțime nevidă, **o operație binară din** A **în** A este o funcție din $A \times A$ în A. O **operație binară dată pe** A **cu valori în** A este o funcție de pe $A \times A$ în A. În aritmetica clasică există două operații binare fundamentale: adunarea și înmulțirea. Multe proprietăți ale acestor ope-

Scanned with OKEN Scanner

rații din aritmetică sînt comune unor operații cu același nume din mulțimi mai abstracte. Dacă o operație binară F este numită **adunare** și dacă $Z = F((x, y))$, atunci z se scrie și ca $z = x + y$. Dacă o operație binară G este numită **înmulțire** și dacă $z = G((x, y))$, atunci z este scris și ca $z = xy$ sau $z = x \cdot y$.

Definiția I. *Un* **corp comutativ** (*sau* **cîmp**) *este o mulțime nevidă* $\mathfrak{F}$, *împreună cu două operații binare de pe* $\mathfrak{F}$ *în* $\mathfrak{F}$, *numite adunare și înmulțire, astfel încît,*

A. Pentru adunare:

(*i*) este valabilă **legea asociativității**

$$x, y, z \in \mathfrak{F} \Rightarrow x + (y + z) = (x + y) + z.$$

(*ii*) $\exists$ *un element* 0 *al lui* $\mathfrak{F}$ *astfel ca*

$$x \in \mathfrak{F} \Rightarrow x + 0 = x.$$

(*iii*) $x \in \mathfrak{F} \Rightarrow \exists\ (-x) \in \mathfrak{F} \ni x + (-x) = 0.$

(*iv*) *este valabilă legea* **comutativității**

$$x, y \in \mathfrak{F} \Rightarrow x + y = y + x.$$

B. **Pentru înmulțire:**

(*i*) este satisfăcută **legea asociativității**

$$x, y, z \in \mathfrak{F} \Rightarrow x(yz) = (xy)z.$$

(*ii*) $\exists$ *un element* 1 *în* $\mathfrak{F}$ *astfel încît* $1 \neq 0$ *și* $x \in \mathfrak{F} \Rightarrow x \cdot 1 = x.$

(*iii*) $x \in \mathfrak{F}, \quad x \neq 0 \Rightarrow \exists\ x^{-1} \in \mathfrak{F} \ni x \cdot x^{-1} = 1.$

(*iv*) *este valabilă* **legea comutativității**

$$x, y \in \mathfrak{F} \Rightarrow xy = yx.$$

C. Pentru adunare și înmulțire:

Este valabilă **legea distributivității** (*mai exact, înmulțirea este distributivă față de adunare*),

$$x, y, z \in \mathfrak{F} \Rightarrow x(y + z) = xy + xz.$$

Scanned with OKEN Scanner

Elementul 0 al lui $\mathcal{F}$, din A(*ii*), se numește *zeroul* sau *elementul neutru al adunării din* $\mathcal{F}$. Elementul $(-x)$ al lui $\mathcal{F}$, din A(*iii*), se numește **opusul** sau **inversul aditiv** al lui x. Operația binară $x-y$, definită de $x-y = x + (-y)$, se numește **scădere.** Elementul 1 al lui $\mathcal{F}$, din B(*ii*) se numește **unu,** sau **elementul unitate,** sau **identitatea multiplicativă** a lui $\mathcal{F}$. Elementul x^{-1} al lui $\mathcal{F}$, din B(*ii*), se numește **reciprocul,** sau **inversul multiplicativ** al lui x. Operația binară x/y, definită de $x/y = xy^{-1}$, unde $y \neq 0$, se numește **împărțire.** Împărțirea este o operație, „din" și nu o operație „de pe-în", deoarece operația „împărțirea cu zero" este exclusă.

O mulțime nevidă $\mathcal{G}$, împreună cu o operație binară de pe $\mathcal{G}$ în $\mathcal{G}$ — notată cu $+$ în acest caz și numită adunare — cu proprietățile A(*i*), (*ii*), (*iii*), se numește un **grup** (în acest caz, un grup *aditiv*). Dacă este satisfăcută și axioma comutativității A(*iv*), $\mathcal{G}$ este un grup **abelian** sau **comutativ.** Așadar, față de adunare, orice corp este un grup abelian aditiv. Elementele nenule ale unui cîmp formează un grup abelian **multiplicativ** față de înmulțire.

Definiția II. *Se numește* **cîmp ordonat** *un cîmp* $\mathcal{F}$ *care conține o submulțime* $\mathcal{Q}$, *astfel încît*

(*i*) $\mathcal{Q}$ *este închisă față de adunare, adică*

$$x \in \mathcal{Q}, \quad y \in \mathcal{Q} \Rightarrow x + y \in \mathcal{Q}.$$

(*ii*) $\mathcal{Q}$ *este închisă față de înmulțire, adică*

$$x \in \mathcal{Q}, \quad y \in \mathcal{Q} \Rightarrow xy \in \mathcal{Q}.$$

(*iii*) $x \in \mathcal{F} \Rightarrow$ *numai una dintre următoarele afirmații este adevărată*

$$x \in \mathcal{Q}; \quad x = 0; \quad -x \in \mathcal{Q}.$$

Un element x al lui $\mathcal{F}$ este **pozitiv,** dacă și numai dacă $x \in \mathcal{Q}$; un element x este **negativ,** dacă și numai dacă $-x \in \mathcal{Q}$.

Scanned with OKEN Scanner

Într-un cîmp ordonat, inegalitățile se definesc prin apartenența la $\mathfrak{P}$. De exemplu,

$x < y$, dacă și numai dacă $y - x \in \mathfrak{P}$;

$x \geqslant y$, dacă și numai dacă $x - y \in \mathfrak{P}$ sau $x = y$.

Dacă $\mathfrak{F}$ este un cîmp ordonat, o funcție f din $\mathfrak{F}$ în $\mathfrak{F}$ este **crescătoare** (sau **nedescrescătoare**) pe o submulțime A a domeniului ei de definiție, dacă și numai dacă

$$x, y \in A, \quad x < y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y).$$

Funcția f este **strict crescătoare** pe A, dacă și numai dacă

$$x, y \in A, \quad x < y \Rightarrow f(x) < f(y).$$

În mod analog se definesc și termenii **descrescător** (sau **necrescător**) și **strict descrescător**. O funcție este **monotonă** pe o mulțime, dacă și numai dacă este sau crescătoare sau descrescătoare pe acest domeniu. Noțiunea de **strict monoton** are o definiție evidentă.

Dacă $\mathfrak{F}$ este un cîmp ordonat și $x \in \mathfrak{F}$, atunci $|x|$, numit **valoarea absolută** a lui x, este definit ca fiind egal cu x cînd $x \geqslant 0$ și $-x$ cînd $x < 0$.

În cele ce urmează sînt enumerate cîteva proprietăți standard ale valorii absolute, cînd $x, y, \varepsilon \in \mathfrak{F}$.

(*i*) $|x| \geqslant 0$; $|x| = 0$, dacă și numai dacă $x = 0$.

(*ii*) $|xy| = |x||y|$.

(*iii*) Dacă $\varepsilon > 0$, $|x| < \varepsilon$, dacă și numai dacă $-\varepsilon < x < \varepsilon$.

(*iv*) **inegalitatea triunghiului** $|x + y| \leqslant |x| + |y|$.

(*v*) $|x| = \sqrt{x^2}$, adică $|x|$ este singurul element al lui $\mathfrak{P} \cup \{0\}$ al cărui pătrat este x^2.

(*vi*) $||x| - |y|| \leqslant |x - y|$.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă $\mathcal{F}$ este un cîmp ordonat și $a,\ b \in \mathcal{F}$, $a < b$, atunci următoarele mulțimi se numesc intervale **finite** sau **mărginite**:

deschis: $(a, b) = \{x \mid x \in \mathcal{F},\ a < x < b\}$,

închis: $[a, b] = \{x \mid x \in \mathcal{F},\ a \leqslant x \leqslant b\}$,

semideschis (sau semiînchis): $[a, b) = \{x \mid x \in \mathcal{F},\ a \leqslant x < b\}$,

semideschis (sau semiînchis): $(a, b] = \{x \mid x \in \mathcal{F},\ a < x \leqslant b\}$.

Analog sînt definite și intervalele **infinite** sau **nemărginite**

deschis: $(a, +\infty) = \{x \mid x > a\}$,

deschis: $(-\infty, a) = \{x \mid x < a\}$,

închis: $[a, +\infty) = \{x \mid x \geqslant a\}$,

închis: $(-\infty, a] = \{x \mid x \leqslant a\}$,

deschis și închis: $(-\infty, +\infty) = \mathcal{F}$.

Se numește **vecinătate** a unui punct a într-un cîmp ordonat $\mathcal{F}$ un interval deschis de forma $(a - \varepsilon,\ a + \varepsilon)$, unde ε este un element pozitiv al lui $\mathcal{F}$. Această vecinătate poate fi exprimată și cu valori absolute, și se notează

$$N(a, \varepsilon) = (a - \varepsilon,\quad a + \varepsilon) = \{x \mid |x - a| < \varepsilon\}.$$

O **vecinătate punctată** a unui punct a este o vecinătate a lui a din care s-a scos a; pentru orice $\varepsilon > 0$ se poate defini o vecinătate punctată $D(a,\varepsilon)$ a punctului a în modul următor

$$D(a, \varepsilon) = \{x \mid 0 < |x - a| < \varepsilon\}.$$

Se pot defini și operațiile binare min și max de pe $\mathcal{F}$ la $\mathcal{F}$:

$$\max(x, y) = \begin{cases} x, \text{ dacă } x \geqslant y, \\ y, \text{ dacă } x < y; \end{cases} \qquad \min(x, y) = \begin{cases} y, \text{ dacă } x \geqslant y, \\ x, \text{ dacă } x < y. \end{cases}$$

Dacă $\mathcal{F}$ este un cîmp ordonat, dacă $u \in \mathcal{F}$, și dacă $x \leqslant u$ pentru orice element x al unei mulțimi nevide A de puncte ale lui $\mathcal{F}$, atunci u se numește **majorant** al lui A. O sub-

Scanned with OKEN Scanner

mulțime nevidă a lui $\mathfrak{F}$ este **mărginită superior** în $\mathfrak{F}$, dacă și numai dacă există un element în $\mathfrak{F}$ care este majorant pentru mulțimea dată. Dacă s este un majorant al lui A și dacă s este mai mic decît orice alt majorant al lui A, atunci s se numește **marginea superioară** sau **supremum** al lui A și se scrie $s = \sup(A) = \sup A$. Sînt valabile definiții similare pentru **minorant**, **mulțime mărginită inferior**, **margine inferioară** sau **infimum** i al unei mulțimi nevide A, desemnat prin $i = \inf(A) = \inf A$.

Definiția III. *Un* **cîmp complet ordonat** *este un cîmp ordonat $\mathfrak{F}$ în care orice submulțime nevidă, mărginită superior în $\mathfrak{F}$, are margine superioară în $\mathfrak{F}$.*

Orice două cîmpuri complet ordonate $\mathfrak{F}$ și $\mathfrak{F}'$ sînt izomorfe în sensul că există o corespondență biunivocă $x \leftrightarrow x'$, cu $x \in \mathfrak{F}$, $x' \in \mathfrak{F}'$, care conservă operațiile binare și ordonarea, adică

$$(x + y)' = x' + y', \quad (xy)' = x'y', \quad x < y \Leftrightarrow x' < y'.$$

(Pentru demonstrație și discuție vezi [35], pp. 128—131.) În ceea ce privește *structura*, sistemul numerelor reale este descris univoc de:

Definiția IV. Sistemul numerelor reale $\boldsymbol{R}$ *este un cîmp complet ordonat.*

O funcție definită pe A, cu valori pe B, este o **funcție cu valori reale** (sau funcție reală), dacă și numai dacă $B \subset \boldsymbol{R}$; este o **funcție de variabilă reală,** dacă și numai dacă $A \subset \boldsymbol{R}$.

Funcția signum este funcția de variabilă reală, cu valori reale, definită și notată prin: $\operatorname{sgn} x = 1$, dacă $x > 0$; $\operatorname{sgn} x = -1$, dacă $x < 0$; $\operatorname{sgn} 0 = 0$.

Dacă S este un spațiu nevid și A o submulțime oarecare a lui S, atunci **funcția caracteristică** a lui A este funcția cu valori reale χ_A definită prin: $\chi_A(x) = 1$, dacă $x \in A$ și $\chi_A(x) = 0$, dacă $x \in A' = S \setminus A$.

Scanned with OKEN Scanner

Definiția V. **O mulțime inductivă** *într-un cîmp ordonat* $\mathfrak{F}$ *este o mulțime* A *cu proprietățile:*

(*i*) $1 \in A$,

(*ii*) $x \in A \Rightarrow x + 1 \in A$.

Definiția VI. *Un element* n *al unui cîmp ordonat* $\mathfrak{F}$ *este un* **număr natural,** *dacă și numai dacă* n *este element al oricărei mulțimi inductive din* $\mathfrak{F}$. Mulțimea tuturor numerelor naturale ale lui $\mathfrak{F}$ se notează cu $\boldsymbol{N}$.

Din această definiție rezultă proprietățile familiare (compară cu [35], pp. 17—18) ale numerelor naturale, inclusiv teorema:

Teorema fundamentală a inducției. *Dacă* $\mathfrak{S}$ *este o mulțime inductivă de numere naturale, atunci* $\mathfrak{S} = \boldsymbol{N}$.

Dacă $\boldsymbol{N}$ și $\boldsymbol{N}^*$ sînt mulțimile numerelor naturale din două cîmpuri ordonate $\mathfrak{F}$ și $\mathfrak{F}^*$, atunci $\boldsymbol{N}$ și $\boldsymbol{N}^*$ sînt izomorfe (compară cu [35], pp. 34—35).

Definiția VII. *Un element* x *al unui cîmp ordonat* $\mathfrak{F}$ *este un* **întreg,** *dacă și numai dacă* $x \in \boldsymbol{N}$, $x = 0$, *sau* $-x \in \boldsymbol{N}$. *Un element* x *al unui cîmp ordonat este un* **număr rațional,** *dacă și numai dacă există întregii* m *și* n, $n \neq 0$, *astfel ca* $x = m/n$.

Mulțimea tuturor numerelor raționale ale unui cîmp ordonat $\mathfrak{F}$, cu operațiile de adunare, înmulțire și ordonare din $\mathfrak{F}$, este și ea un cîmp ordonat, notat $\boldsymbol{Q}$. (Orice două cîmpuri ordonate de numere raționale sînt izomorfe, compară cu [35], p.67.)

Definiția VIII. *Un* **inel** *este o mulțime nevidă* $\mathfrak{B}$ *pe care au fost definite două operații binare cu valori în* $\mathfrak{B}$, *numite* **adunare** *și* **înmulțire,** *astfel încît sînt îndeplinite următoarele condiții ale Definiției I*: A(*i*), (*ii*), (*iii*), (*iv*), B(*i*), C *și o nouă lege de distributivitate*:

$$\mathbf{C}'.\ x, y, z \in \mathfrak{B} \Rightarrow (x + y)\, z = xz + yz.$$

Scanned with OKEN Scanner

Definiția IX. *Un* **domeniu de integritate** *este un inel* $\mathfrak{D}$ *care îndeplinește și următoarele condiții ale Definiției I:* B(*ii*), (*iv*), *deci toate condițiile Definiției I, cu excepția lui* B(*iii*), *și, în plus, următoarea variantă slăbită a lui* B(*iii*):

D. $x \in \mathfrak{D},\ y \in \mathfrak{D},\ x \neq 0,\ y \neq 0 \Rightarrow xy \neq 0.$

Se poate verifica că D este o variantă mai slabă a lui B(*iii*) (deci consecință a ei): presupunînd că există $x \neq 0$ și $y \neq 0$ astfel încît $xy = 0$, avem $x^{-1}(xy) = (x^{-1}x)\,y = 1y = y \neq 0$, în timp ce $x^{-1}\,0 = 0$. (Contradicție). În orice inel, legea D este echivalentă cu legea:

D′ Legea simplificării (scurtării). $xy = xz,\ x \neq 0 \Rightarrow y = z.$

($D \Rightarrow D'$ deoarece $xy = xz$, dacă și numai dacă $x(y - z) = 0$; $D' \Rightarrow D$ deoarece $xy = 0$ poate fi scris ca $xy = x0$).

Mulțimea tuturor întregilor unui cîmp ordonat $\mathfrak{F}$, cu operațiile de adunare și multiplicare din $\mathfrak{F}$, este un domeniu de integritate, notat $\mathbf{Z}$. Oricare două domenii de integritate de întregi sînt izomorfe (compară cu [35], p.64).

Fie f o funcție definită în $\mathfrak{F}$ cu valori în $\mathfrak{F}$, unde $\mathfrak{F}$ este un cîmp ordonat, și fie $a \in \mathfrak{F}$. Atunci f este **continuă** în a, dacă și numai dacă a aparține domeniului de definiție D al lui f și dacă pentru orice element ε pozitiv al lui $\mathfrak{F}$ există un element pozitiv δ în $\mathfrak{F}$ astfel încît pentru orice $x \in D$ să avem $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ de îndată ce $|x - a| < \delta$. Cu ajutorul **cuantificatorului de universalitate** $\forall$, care reprezintă expresiile *pentru toți, pentru un, arbitrar, pentru orice, pentru fiecare*, și cu limbajul și notațiile vecinătăților, ultima parte a definiției continuității lui f într-un punct a al lui D poate fi exprimată în modul următor:

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, \delta > 0 \ni f(D \cap N(a, \delta)) \subset N(f(a), \varepsilon).$$

Un punct p este **punct limită***) al unei submulțimi nevide A dintr-un cîmp ordonat $\mathfrak{F}$, dacă și numai dacă orice vecinătate punctată a lui p conține cel puțin un punct al lui A:

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, a \in D\, (p, \varepsilon) \cap A.$$

*) **sau punct de acumulare**—*N.T.*

Scanned with OKEN Scanner

Dacă f este o funcție din $\mathfrak{F}$ cu valori în $\mathfrak{F}$, dacă a este un punct limită al domeniului D de definiție al lui f și dacă $b \in \mathfrak{F}$, atunci se spune că *limita* lui $f(x)$ cînd x tinde către a există și este egală cu b, cu notația

$$\lim_{x \to a} f(x) = b,$$

dacă și numai dacă

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \, \delta > 0 \ni f(D \cap D(a, \delta)) \subset N(b, \varepsilon).$$

Limitele unilaterale se definesc în mod similar și se notează $\lim_{x \to a+} f(x)$ și $\lim_{x \to a-} f(x)$.

O funcție f definită pe o parte D a unui cîmp ordonat, $\mathfrak{F}$ cu valori în $\mathfrak{F}$, este **uniform continuă** pe o submulțime A a domeniului ei de definiție D, dacă și numai dacă

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \, \delta > 0 \ni x_1, x_2 \in A, \, |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

Dacă f este o funcție definită într-un cîmp ordonat $\mathfrak{F}$, cu valori în $\mathfrak{F}$, și dacă a este un punct al domeniului D de definiție al lui f, atunci simbolul $f'(a)$ desemnează elementul lui $\mathfrak{F}$ **definit de**

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h},$$

cu condiția ca această limită să existe. Funcția f' dată de $f'(x)$, oriunde există pentru x în D, se numește **derivata** lui f.

Se spune că o funcție f din cîmpul ordonat $\mathfrak{F}$ în $\mathfrak{F}$ are **proprietatea valorii intermediare** pe un interval I, conținut în domeniu ei de definiție, dacă și numai dacă

$$\forall a, b \in I, \, d \in \mathfrak{F} \ni a < b$$

și $f(a) < d < f(b)$, sau $f(a) > d > f(b)$, $\exists \, c \ni a < c < b, f(c) = d$.

Se numește **șir** o funcție al cărei domeniu de definiție este mulțimea numerelor naturale $\boldsymbol{N}$. Valoarea ei pentru un anumit n este indicată printr-un indice în modul următor: a_n; șirul însuși este notat prin acolade $\{a_n\}$. Se spune

Scanned with OKEN Scanner

despre un șir $\{a_n\}$, ai cărui **termeni** a_n sînt elemente ale unui cîmp ordonat $\mathfrak{F}$, că este **convergent** și are **limita** b, sau **converge** către b, $b \in \mathfrak{F}$, dacă și numai dacă

$$\forall \varepsilon \in \mathfrak{Q} \exists N \in \boldsymbol{N} \ni n > N \Rightarrow |a_n - b| < \varepsilon,$$

unde $\mathfrak{Q}$ este mulțimea elementelor pozitive din $\mathfrak{F}$. Un șir este **divergent,** dacă și numai dacă nu este convergent (adică, dacă și numai dacă nu există nici o limită b). Un șir $\{a_n\}$ ai cărui termeni a_n sînt elementele unui cîmp ordonat $\mathfrak{F}$ este un **șir Cauchy,** dacă și numai dacă

$$\forall \varepsilon \in \mathfrak{Q} \exists N \in \boldsymbol{N} \ni m, n > N \Rightarrow |a_m - a_n| < \varepsilon.$$

Orice șir convergent este un șir Cauchy, iar dacă $\mathfrak{F} = \boldsymbol{R}$, atunci orice șir Cauchy este un șir convergent (compară cu [34], p.57).

Un **număr complex** este o pereche ordonată (x,y) de numere reale x și y. **Adunarea** și **înmulțirea** numerelor complexe se definesc în modul următor:

$$(x, y) + (u, v) = (x + u,\ y + v),$$

$$(x, y)\,(u, v) = (xu - yv,\ xv + yu).$$

Numerele complexe formează un cîmp $\boldsymbol{C}$ (compară cu [34], p. 487) cu zero (0,0) și unitatea (1,0). În cele ce urmează vom folosi pentru perechea (x,y) notația standard $x + iy$.

1. Un cîmp infinit care nu poate fi ordonat.

A spune că un cîmp $\mathfrak{F}$ nu poate fi ordonat înseamnă a spune că el nu conține nici o submulțime $\mathfrak{Q}$ care satisface cele trei proprietăți ale Definiției II din Introducere. Ca un comentariu preliminar menționăm că, dat fiind că orice cîmp ordonat este infinit, nici un cîmp finit nu poate fi ordonat ([35], p.37).

Un exemplu de cîmp **infinit** care nu poate fi ordonat este cîmpul $\boldsymbol{C}$ al numerelor complexe. Pentru a demonstra acest lucru, să presupunem că există o submulțime $\mathfrak{Q}$ a lui $\boldsymbol{C}$, care satisface Definiția II. Să considerăm numărul $i = (0,1)$.

Scanned with OKEN Scanner

Dat fiind că $i \neq (0,0)$, există două alternative. Prima este $i \in \mathfrak{P}$, în care caz $i^2 = (-1,0) \in \mathfrak{P}$, de unde $i^4 = (1,0) \in \mathfrak{P}$. Dat fiind că i^2 și i^4 sînt unul opusul celuilalt și deoarece este imposibil ca două elemente opuse să facă parte din $\mathfrak{P}$, am ajuns la o contradicție (compară cu Definiția III (*iii*)) așa cum și doream. Cealaltă alternativă este $-i = (0, -1) \in \mathfrak{P}$, și obținem aceeași contradicție ca mai sus.

2. Un cîmp care este cîmp ordonat în două moduri distincte.

Mulțimea $\mathfrak{F}$ a tuturor numerelor de forma $r + s\sqrt{2}$, unde r și s sînt raționale, iar operațiile de adunare și înmulțire sînt cele ale sistemului numerelor reale $\boldsymbol{R}$ (a cărui submulțime este $\mathfrak{F}$), este un cîmp ordonat, submulțimea $\mathfrak{P}$ a Definiției II este mulțimea tuturor elementelor lui $\mathfrak{F}$ care sînt elemente pozitive ale lui $\boldsymbol{R}$, adică numere reale pozitive. Un alt mod de a ordona pe $\mathfrak{F}$ este dat de submulțimea $\mathfrak{B}$ definită de

$$r + s\sqrt{2} \in \mathfrak{B} \Leftrightarrow r - s\sqrt{2} \in \mathfrak{P}.$$

Se poate verifica ușor că $\mathfrak{B}$ satisface cele trei condiții ale Definiției II.

Atît cîmpul $\boldsymbol{Q}$ al numerelor raționale cît și cîmpul $\boldsymbol{R}$ al numerelor reale sînt cîmpuri care pot fi ordonate într-un singur mod (v.[35], p. 146).

3. Un cîmp ordonat care nu este complet.

Cîmpul ordonat $\boldsymbol{Q}$ al numerelor raționale nu este complet. Aceasta se poate vedea în modul următor. Mulțimea A a tuturor numerelor raționale pozitive, al căror pătrat este mai mic decît 2,

$$A = \{r \mid r \in \boldsymbol{Q},\ r > 0,\ r^2 < 2\},$$

este nevidă ($1 \in A$) și este mărginită superior de numărul rațional 2.

Scanned with OKEN Scanner

Să presupunem că $\boldsymbol{Q}$ ar fi complet. Atunci există un număr rațional c, care este marginea superioară a lui A. Deoarece nu există un număr rațional al cărui pătrat să fie egal cu 2 (vezi [35], p.126), sau $c^2 < 2$, sau $c^2 > 2$. Presupunem mai întîi că $c^2 < 2$ și fie d numărul pozitiv

$$d = \frac{1}{2} \min \left(\frac{2 - c^2}{(c+1)^2}, 1 \right).$$

Atunci $c + d$ este un număr pozitiv, rațional, mai mare decît c, al cărui pătrat este mai mic decît 2:

$$(c+d)^2 < c^2 + d(c+1)^2 < 2.$$

Dar aceasta înseamnă că $c + d \in A$, în timp ce c este marginea superioară a lui A. (Contradicție.) Să presupunem acum că $c^2 > 2$ și fie d numărul pozitiv

$$d = \frac{c^2 - 2}{2(c+1)^2}.$$

Atunci $c - d$ este un număr rațional pozitiv mai mic decît c, al cărui pătrat este mai mare decît 2

$$(c-d)^2 > c^2 - d(c+1)^2 > 2.$$

Dat fiind că $c - d$ este un majorant al lui A, mai mic decît marginea superioară c, am ajuns din nou la o contradicție.

4. Un cîmp ordonat nearhimedean.

Un cîmp ordonat $\mathfrak{F}$ este arhimedean dacă mulțimea $\boldsymbol{N}$ a numerelor naturale ale lui $\mathfrak{F}$ nu este mărginită superior în $\mathfrak{F}$ (în mod echivalent, ori de cîte ori $a, b \in \mathfrak{F}$, $a > 0$, $b > 0$, atunci există un număr natural n, astfel încît $na > b$).

Fie o **funcție polinomială** definită pe $\boldsymbol{R}$ cu valori în $\boldsymbol{R}$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k, \quad a_k \in \boldsymbol{R}, \quad k = 0, 1, \ldots, n,$$

Scanned with OKEN Scanner

și fie g o funcție polinomială nenulă (adică $g(x)$ nu este *identic* nulă), și fie f/g funcția rațională h definită de $h(x) = f(x)/g(x)$, al cărei domeniu de definiție constă din mulțimea tuturor numerelor reale pentru care $g(x) \neq 0$. Fie $\mathcal{K}$ mulțimea tuturor funcțiilor raționale f/g ireductibile (singurii factori polinomiali comuni ai lui f și g sînt constantele), în care au fost definite adunarea și înmulțirea

$$\frac{f}{g} + \frac{r}{s} = \frac{fs + gr}{gs}, \qquad \frac{f}{g} \cdot \frac{r}{s} = \frac{fr}{gs},$$

în ambele cazuri membrul drept fiind redus la o fracție ireductibilă. Atunci $\mathcal{K}$ este un cîmp ([35], p. 104). Dacă se definește o submulțime $\mathcal{Q}$ a lui $\mathcal{K}$ ca fiind formată din toate funcțiile nenule f/g din $\mathcal{K}$, cu proprietatea că coeficienții dominanți (adică coeficienții termenilor cu gradul cel mai mare) ai lui f și g au același semn, atunci $\mathcal{Q}$ satisface condițiile Definiției II și $\mathcal{K}$ este un cîmp ordonat. Dar orice funcție rațională $f/1$, în care f este un polinom neconstant, cu coeficientul dominant pozitiv, este un majorant pentru mulțimea $\boldsymbol{N}$ a numerelor naturale ale lui $\mathcal{K}$ (numerele naturale din $\mathcal{K}$ sînt funcțiile raționale constante, de forma $n/1$, unde n este polinomul constant ale cărui valori coincid toate cu numărul natural n). O discuție detailată se poate găsi în [35] (vezi pp. 99—108).

5. Un cîmp ordonat care nu poate fi completat.

A spune că un cîmp ordonat $\mathcal{F}$ nu poate fi completat înseamnă a spune că nu există un cîmp complet ordonat $\boldsymbol{R}$, care să conțină pe $\mathcal{F}$, astfel încît operațiile de adunare și înmulțire și relația de ordonare din $\mathcal{F}$ să fie compatibile cu cele din $\boldsymbol{R}$. În acest sens cîmpul $\mathcal{K}$ din exemplul precedent nu poate fi completat; cu alte cuvinte, nu poate fi *scufundat* în mulțimea numerelor reale (vezi Definiția IV). Pe scurt, motivul este următorul: dacă $\mathcal{K}$ *ar putea* fi scufundat în $\boldsymbol{R}$ atunci, evident, numerele naturale din $\mathcal{K}$ ar coincide cu numerele naturale din $\boldsymbol{R}$.

Scanned with OKEN Scanner

Dat fiind că $\boldsymbol{N}$ este mărginită superior în $\mathcal{K}$, dar nu și în $\boldsymbol{R}$ (vezi [35], p.122), ajungem la o contradicție.

6. Un cîmp ordonat în care mulțimea numerelor raționale nu este densă.

„Numerele raționale" ale cîmpului ordonat $\mathcal{K}$ din Exemplul 4 nu sînt dense în $\mathcal{K}$. Ceea ce înseamnă că există două elemente distincte ale lui $\mathcal{K}$ între care nu există nici un număr rațional. În realitate, orice cîmp ordonat $\mathcal{F}$, în care mulțimea numerelor raționale este densă, este arhimedean. Pentru demonstrație, fie a un element pozitiv oarecare al lui $\mathcal{F}$ și fie m/n un număr rațional între 0 și $1/a$. Notația trebuie modificată în așa fel încît să se poată presupune (fără a pierde din generalitate) că atît m cît și n sînt pozitivi.

Atunci

$$0 < \frac{1}{n} \leqslant \frac{m}{n} < \frac{1}{a},$$

de unde $n > a$. În consecință, a nu este un majorant al lui $\boldsymbol{N}$, și dat fiind că a este arbitrar, $\boldsymbol{N}$ nu este mărginită superior. Rezultă deci că, dat fiind că $\mathcal{K}$ *nu* este arhimedean, mulțimea numerelor raționale din $\mathcal{K}$ *nu poate* fi densă în $\mathcal{K}$. Orice pereche de polinoame distincte, neconstante, cu coeficienți dominanți pozitivi, constituie un exemplu de perechi de elemente ale lui $\mathcal{K}$, între care nu există nici un număr rațional.

7. Un cîmp ordonat care este complet în sensul lui Cauchy, dar nu este complet ordonat.

Dacă cîmpul ordonat $\mathcal{K}$ de funcții raționale din Exemplul 4, este extins cu ajutorul claselor de echivalență de șiruri Cauchy, structura obținută este un cîmp ordonat în care orice șir Cauchy este convergent. Totuși, după

Scanned with OKEN Scanner

Exemplul 5, această completitudine în sensul lui Cauchy nu poate fi completitudine în sensul definiției date în Introducere cu ajutorul marginii superioare. (Pentru tratarea generală a completitudinii în sensul lui Cauchy, vezi [20], pp.106—107, [21]).

8. Un domeniu de integritate fără factorizare unică.

O **unitate** a unui domeniu de integritate $\mathfrak{D}$ este un element u al lui $\mathfrak{D}$ care are un invers multiplicativ v în $\mathfrak{D}$: $uv = 1$. (Unitățile domeniului de integritate $\boldsymbol{Z}$ al întregilor sînt 1 și -1.) Orice element al lui $\mathfrak{D}$ care este produsul a două elemente nenule ale lui $\mathfrak{D}$, dintre care nici unul nu este unitate, se numește un element **compus.** Orice element nenul al lui $\mathfrak{D}$, care nu este nici unitate nici compus, se numește **prim.** Un domeniu de integritate $\mathfrak{D}$ este un **domeniu cu factorizare unică,** dacă și numai dacă orice element nenul și diferit de o unitate al lui $\mathfrak{D}$ poate fi exprimat ca produsul unui număr finit de elemente prime ale lui $\mathfrak{D}$; în plus, se cere ca această exprimare să fie unic determinată, abstracție făcînd de ordinea factorilor sau de înmulțirea factorilor cu unități.

Fie, în mulțimea $\boldsymbol{R}$ a numerelor reale, mulțimea Φ a tuturor numerelor de forma $a + b\sqrt{5}$, unde $a, b \in \boldsymbol{Z}$. Atunci Φ este un domeniu de integritate. Se pot demonstra cu ușurință următoarele două afirmații ([35], p.144):

(*i*) Unitățile lui Φ sînt elementele $a + b\sqrt{5}$, pentru care $|a^2 - 5b^2| = 1$.

(*ii*) Dacă $a + b\sqrt{5}$ este nenul și nu este unitate, atunci $|a^2 - 5b^2| \geqslant 4$. În consecință, dacă $1 < |a^2 - 5b^2| < 16$, $a + b\sqrt{5}$ este prim. În particular, 2, $1 + \sqrt{5}$ și $-1 + \sqrt{5}$ sînt toate elemente prime ale lui Φ, deoarece pentru toate $|a^2 - 5b^2| = 4$. Mai mult, cele două descompuneri ale lui 4

$$2 \cdot 2 = (1 + \sqrt{5})(-1 + \sqrt{5})$$

Scanned with OKEN Scanner

sînt distincte în sensul definit mai sus: în nici unul din membrii egalității, nici unul din cei doi factori nu este produsul unei unități cu unul din factorii celuilalt membru. (Pentru detalii vezi [35], p.145.)

9. Două numere fără cel mai mare divizor comun.

Într-un domeniu de integritate $\mathfrak{D}$ un element m **divide** (este divizor) un element n, dacă și numai dacă există un număr $p \in \mathfrak{D}$, astfel încît $mp = n$. Se scrie $m|n$. Un element $p \in \mathfrak{D}$ se numește **cel mai mare divizor comun** a două elemente a și b din $\mathfrak{D}$, dacă și numai dacă

$$(i) \qquad d \mid a \text{ și } d \mid b,$$

$$(ii) \qquad c \mid a,\ c \mid b \Rightarrow c \mid d.$$

În domeniul de integritate Φ al exemplului precedent, numerele 4 și $2(1 + \sqrt{5})$ nu au un cel mai mare divizor comun. (Pentru detalii vezi [35], pp.145—146.)

10. O fracție care nu poate fi simplificată în mod unic.

Dacă fracțiile sînt construite din perechi de elemente ale domeniului de integritate Φ din Exemplul 8, atunci fracția $2(1 + \sqrt{5})/4$ poate fi simplificată în următoarele două moduri:

$$\frac{2(1+\sqrt{5})}{4} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{2}{-1+\sqrt{5}}.$$

Rezultatele sînt distincte, în sensul că nici unul dintre numărători nu se obține din celălalt prin înmulțirea cu o unitate, și nici unul din numitori nu se obține din altul prin înmulțire cu o unitate.

11. Funcții continue pe un interval închis și care nu mai au proprietățile obișnuite dacă sistemul de numere nu este complet.

Încheiem acest capitol cu o colecție de funcții definite pe un interval închis $[a,b] \subset \boldsymbol{Q}$ și cu valori în $\boldsymbol{Q}$. Exemplele

Scanned with OKEN Scanner

Scanned with OKEN Scanner

și-ar pierde valabilitatea dacă mulțimea numerelor raționale $\boldsymbol{Q}$, care nu este completă (vezi Exemplul 3), ar fi înlocuită cu mulțimea numerelor reale $\boldsymbol{R}$, care este completă. Cîmpul ordonat $\boldsymbol{Q}$ va fi considerat scufundat în $\boldsymbol{R}$, pentru a putea utiliza simboluri, ca de pildă $\sqrt{2}$. Litera x reprezintă, în ambele cazuri, un număr rațional.

a. *O funcție continuă pe un interval închis și nemărginită pe acest interval (deci, dat fiind că intervalul este mărginit, funcția nu este uniform continuă pe interval).*

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 2}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 2.$$

b. *O funcție continuă și mărginită pe un interval închis, dar care nu este uniform continuă pe interval.*

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant x < \sqrt{2}, \\ 1, & \sqrt{2} < x \leqslant 2. \end{cases}$$

c. *O funcție uniform continuă (și deci mărginită) pe un interval închis, dar care nu are o valoare maximă pe acest interval.*

$$f(x) = x - x^3, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

d. *O funcție continuă pe un interval închis, care nu are proprietatea valorii intermediare pe acest interval.*

Exemplul b; sau $f(x) = x^2$ pe $[1,2]$, care nu ia valoarea 2, intermediară între valorile 1 și 4.

e. *O funcție neconstantă, derivabilă, a cărei derivată se anulează identic pe un interval închis.*

Exemplul b.

f. *O funcție derivabilă care nu satisface teorema lui Rolle* (și deci nici teorema mediei).

Exemplul c.

g. *O funcție monotonă, uniform continuă și neconstantă, care are proprietatea valorii intermediare și a cărei derivată este identic nulă pe un interval.*

Acest exemplu este mai dificil decît cele anterioare. El poate fi construit cu ajutorul mulțimii lui Cantor, definită și discutată în Capitolul 8. Pentru detalii a se vedea Capitolul 8, Exemplul 15.

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul 2

Funcţii şi limite

Introducere

În acest capitol va fi necesar să extindem cîteva din definiţiile Capitolului I sau să introducem altele noi. Dacă nu există vreo menţiune specială, vom admite că toate mulţimile considerate sînt submulţimi ale lui $\boldsymbol{R}$, sistemul numerelor reale, iar toate funcţiile sînt funcţii reale de variabilă reală.

Vom începe prin a extinde reuniunile şi intersecţiile pentru clase infinite de mulţimi $A_1, A_2, \ldots$:

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n = A_1 \cup A_2 \cup \ldots = \{x \mid x \in A_n \text{ pentru cel puţin un } n = 1, 2, \ldots\},$$

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n = A_1 \cap A_2 \cap \ldots = \{x \mid x \in A_n \text{ pentru orice } n = 1, 2, \ldots\}.$$

O mulţime A este **închisă** dacă îşi conţine toate punctele limită; adică, dacă şi numai dacă nu există nici un punct al lui A' care este punct limită al lui A. O mulţime A este **deschisă,** dacă şi numai dacă orice punct al lui A are o vecinătate conţinută în întregime în A. Un punct p este punct **frontieră** al lui A, dacă şi numai dacă orice vecinătate a lui p conţine cel puţin un punct al lui A şi cel puţin un punct al lui A'. Mulţimea tuturor punctelor frontieră se numeşte **frontiera** lui A şi se notează $F(A)$. Un punct p este un punct **interior** al lui A, dacă şi numai dacă există o vecinătate a lui p, conţinută în întregime în A.

Scanned with OKEN Scanner

Mulțimea punctelor interioare ale lui A se numește **interiorul** lui A și se notează $I(A)$. Orice mulțime închisă A este reuniunea interiorului ei și a frontierei ei: $A = I(A) \cup F(A)$. **Închiderea** lui A, notată cu $\bar{A}$, este reuniunea mulțimii A cu mulțimea tuturor punctelor limită ale lui A. O **acoperire deschisă** a lui A este o familie $\{U_\alpha\}$ de mulțimi deschise U_α a căror reuniune conține pe A; în acest caz $\{U_\alpha\}$ **acoperă** pe A. O mulțime A este **compactă**, dacă și numai dacă orice acoperire deschisă a lui A conține o subfamilie finită care acoperă pe A. În spațiul $\boldsymbol{R}$ o mulțime este compactă, dacă și numai dacă este închisă și mărginită. (Aceasta este teorema Heine-Borel și reciproca ei; a se vedea [34], p.202.)

O mulțime A este **numerabilă,** dacă și numai dacă A este finită sau există o aplicație biunivocă cu domeniul de definiție $\boldsymbol{N}$ (mulțimea numerelor naturale) și cu domeniul valorilor A.

O proprietate importantă a sistemului numerelor reale este următoarea: pentru orice număr real x, există un singur număr întreg n astfel încît

$$n \leqslant x < n + 1, \text{ sau } x - 1 < n \leqslant x.$$

Dat fiind că n este determinat în mod unic ca fiind cel mai mare număr întreg mai mic decît x sau egal cu x, am definit astfel o funcție f, cunoscută ca **partea întreagă** a lui x și notată $f(x) = [x]$, definită echivalent ca fiind numărul întreg $[x]$, care satisface condițiile

$$[x] \leqslant x < [x] + 1, \text{ sau } x - 1 < [x] \leqslant x.$$

Parantezele drepte vor indica partea întreagă *numai* atunci cînd vom menționa acest lucru.

O funcție f definită pe $\boldsymbol{R}$ și cu valori în $\boldsymbol{R}$ este **periodică, cu perioada** p, dacă și numai dacă $f(x + p) = f(x)$ pentru toți $x \in \boldsymbol{R}$. O funcție este **periodică,** dacă și numai dacă este periodică, cu perioada p, pentru un p nenul.

Fie a un punct limită al domeniului de definiție D al unei funcții f și fie $f(x)$ mărginită într-o vecinătate a lui a pentru $x \in D$. **Limita superioară,** $\overline{\lim\limits_{x \to a}} f(x)$, și **limita inferioară,**

Scanned with OKEN Scanner

$\overline{\lim_{x\to a}} f(x)$, ale lui f în a, sînt definite cu ajutorul funcțiilor φ și ψ precum urmează: pentru $\delta > 0$

$$\varphi(\delta) = \sup \{f(x) \mid x \in D \cap D(a, \delta)\},$$
$$\psi(\delta) = \inf \{f(x) \mid x \in D \cap D(a, \delta)\},$$
$$\overline{\lim_{x\to a}} f(x) = \lim_{\delta\to 0+} \varphi(\delta) = \inf \{\varphi(\delta) \mid \delta > 0\},$$
$$\underline{\lim_{x\to a}} f(x) = \lim_{\delta\to 0+} \psi(\delta) = \sup \{\psi(\delta) \mid \delta > 0\}.$$

O funcție f este **superior semicontinuă** într-un punct $a \in D$, dacă și numai dacă $\overline{\lim_{x\to a}} f(x) \leqslant f(a)$; f este **inferior semicontinuă** în a, dacă și numai dacă $\underline{\lim_{x\to a}} f(x) \geqslant f(a)$; f este **semicontinuă** în a dacă f este sau inferior sau superior semicontinuă în a.

O funcție f este **local mărginită într-un punct** a, care este sau punct oarecare sau punct limită al domeniului de definiție, dacă și numai dacă există o vecinătate a lui a în care f este mărginită; f este **local mărginită** pe o submulțime A a domeniului ei, dacă și numai dacă f este local mărginită în fiecare punct al lui A.

Limitele infinite $\pm\infty$ și limitele lui $f(x)$ atunci cînd $x \to \pm\infty$ se definesc ca și în cazul $\lim_{x\to a} f(x) = b$, cu excepția faptului că se folosesc vecinătăți punctate ale punctelor de la infinit

$$D(+\infty, N) = (N, +\infty),$$
$$D(-\infty, N) = (-\infty, N).$$

De exemplu:

$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$, dacă și numai dacă

$$\forall K \exists \delta > 0 \ni f(D \cap D(a, \delta)) \subset D(+\infty, K),$$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = b$, dacă și numai dacă

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \ni f(D \cap D(-\infty, N) \subset N(b, \varepsilon).$$

Scanned with OKEN Scanner

Sînt presupuse cunoscute definiţiile fundamentale ale convergenţei şi convergenţei uniforme ale seriilor infinite, ca şi criteriul de convergenţă uniformă al lui Weierstrass (vezi [34], pp.381, 444, 445).

1. O funcţie nicăieri continuă, a cărei valoare absolută este continuă peste tot.

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{ dacă } x \text{ este raţional,} \\ -1, \text{ dacă } x \text{ este iraţional.} \end{cases}$$

2. O funcţie continuă într-un singur punct. (Vezi Exemplul 22).

$$f(x) = \begin{cases} x, \text{ dacă } x \text{ este raţional,} \\ -x, \text{ dacă } x \text{ este iraţional.} \end{cases}$$

Singurul punct de continuitate este 0.

3. Pentru orice mulţime necompactă, o funcţie continuă şi nemărginită care are mulţimea dată ca domeniu de definiţie.

(*a*) Dacă A este o mulţime nemărginită de numere reale, fie

$$f(x) = x, \quad x \in A.$$

(*b*) Dacă A este o mulţime mărginită de numere reale şi care nu este închisă, fie c un punct limită al lui A, neconţinut în A, şi fie

$$f(x) = \frac{1}{x - c}, \quad x \in A.$$

Dacă f este continuă pe o mulţime *compactă* A, atunci f este mărginită pe A (vezi [36], p.80).

Scanned with OKEN Scanner

4. Pentru orice mulțime necompactă, o funcție nemărginită, local mărginită, definită pe mulțimea dată.

Exemplul 3.

Dacă f este local mărginită pe o mulțime compactă A, atunci f este mărginită pe A.

5. O funcție finită peste tot, care nu este nicăieri local mărginită.

Dacă x este un număr rațional egal cu m/n, unde m și n sînt întregi astfel încît fracția m/n este ireductibilă și $n > 0$, atunci m și n sînt unic determinați (vezi [35], p.53). De aceea, este bine definită următoarea funcție:

$$f(x) = \begin{cases} n, \text{ dacă } x \text{ este rațional, } x = m/n, \text{ fracție ireductibilă, } n > 0 \\ 0, \text{ dacă } x \text{ este irațional.} \end{cases}$$

Dacă f ar fi mărginită în $N(a, \varepsilon)$, atunci pentru toți m/n în $N(a, \varepsilon)$ numitorii n, deci și numărătorii m, ar fi mărginiți. Aceasta ar implica existența doar a unui număr finit de numere raționale în intervalul $N(a, \varepsilon)$. (Contradicție.) (Vezi Capitolul 8, Exemplul 27, pentru o funcție care include și alte patologii, mai violente decît aceasta. A se vedea de asemenea Capitolul 8, Exemplul 29.)

6. Pentru o mulțime necompactă arbitrară, o funcție continuă și mărginită, definită pe mulțimea dată, și care nu are valori extreme.

(a). Dacă A este o mulțime nemărginită de numere reale, fie

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}, \quad x \in A.$$

Atunci $f(x)$ nu are valoare maximă pe A. Dacă $f(x)$ este definit prin egalitatea

$$f(x) = (-1)^{[|x|]} \frac{x^2}{x^2 + 1}, \quad x \in A,$$

Scanned with OKEN Scanner

unde $[|x|]$ este cel mai mare întreg cuprins în $|x|$, atunci $f(x)$ nu are nici o valoare maximă, nici o valoare minimă pe A.

(b) Dacă A este o mulțime mărginită, însă neînchisă, de numere reale, fie c un punct limită al lui A, care nu aparține lui A, și fie

$$f(x) = -|x - c|, \quad x \in A.$$

Atunci $f(x)$ nu posedă o valoare maximă pe A. Dacă $f(x)$ este definit prin egalitatea

$$f(x) = (-1)^{[1/|x-c|]} \{L - |x - c|\},$$

unde parantezele drepte sînt utilizate pentru indicarea „părții întregi" și dacă L este lungimea unui interval oarecare care conține pe A, atunci $f(x)$ nu are nici valoare minimă, nici maximă pe A.

7. O funcție mărginită care nu are extreme relative pe un domeniu compact.

Să considerăm ca domeniu compact intervalul închis $[0,1]$ și pentru $x \in [0,1]$ să definim

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{(-1)^n n}{n+1}, & \text{dacă } x \text{ este rațional, } x = m/n, \text{ fracție ireductibilă } n > 0, \\ 0, & \text{dacă } x \text{ este irațional.} \end{cases}$$

Atunci în orice vecinătate a oricărui punct al lui $[0,1]$ valorile lui f sînt oricît de apropiate de numerele 1 și -1, fiind totuși întotdeauna situate între ele. (Vezi [14], p.127.)

8. O funcție mărginită care nu este nicăieri semicontinuă.

Funcția din Exemplul 7 nu este nicăieri superior semicontinuă, dat fiind că $\overline{\lim_{x \to a}} f(x)$ este peste tot egală cu 1 și deci

Scanned with OKEN Scanner

nicăieri nu este $\leqslant f(a)$. De asemenea, această funcție nu este nicăieri inferior semicontinuă. (De observat că funcția din Exemplul 1 este superior semicontinuă în a, dacă și numai dacă a este rațional și inferior semicontinuă în a, dacă și numai dacă a este irațional.)

9. O funcție periodică neconstantă, fără perioadă pozitivă minimă.

Perioadele funcției din Exemplul 1 sînt numerele raționale. Perioadele oricărei funcții cu valori reale, al cărei domeniu de definiție este $\boldsymbol{R}$, formează un grup aditiv (adică mulțimea perioadelor este închisă față de scădere). Acest grup este sau dens (ca în exemplul de față) sau discret, constînd din toți multiplii întregi ai celui mai mic element pozitiv. Acest ultim caz se obține totdeauna pentru o funcție periodică neconstantă, cu domeniul de definiție $\boldsymbol{R}$ și care are cel puțin *un* punct de continuitate. (Vezi [36], p. 549.)

10. O funcție irațională.

Funcția $\sqrt{x}$ nu este o funcție rațională (a se vedea Capitolul 1, Exemplul 4) dat fiind că nu este definită pentru $x < 0$.

Funcția $[x]$ nu este o funcție rațională, deoarece are discontinuități în anumite puncte ale domeniului ei de definiție.

Funcția $|x|$ nu este o funcție rațională, deoarece nu are derivată într-unul din punctele domeniului ei de definiție.

Funcția $\sqrt{x^2+1}$ nu este o funcție rațională. Aceasta se poate vedea în modul următor. Dacă $\sqrt{x^2+1} = f(x)/g(x)$ pentru toți x, atunci $\sqrt{x^2+1}/x = f(x)/xg(x)$ pentru toți $x \neq 0$, și deci $\lim_{x\to+\infty} f(x)/xg(x) = 1$. Aceasta înseamnă că $f(x)$ și $xg(x)$ sînt polinoame de același grad și, de aceea, $\lim_{x\to-\infty} f(x)/xg(x) = 1$, în timp ce $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+1}/x = -1$. (Contradicție.)

Scanned with OKEN Scanner

11. O funcție transcendentă.

O funcție f este **algebrică,** dacă și numai dacă $\exists$ un polinom $p(u) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x)u^k$, ai cărui coeficienți $a_0(x), a_1(x), \ldots, a_n(x)$ sînt polinoame reale (adică, coeficienții lor sînt toți reali), nu toate identic nule, astfel încît funcția compusă $p(f(x))$ se anulează identic pe domeniul lui f. O funcție este **transcendentă,** dacă și numai dacă nu este algebrică.

e^x este un exemplu de funcție transcendentă, deoarece, dacă presupunem că

$$a_0(x) + a_1(x)\, e^x + \ldots + a_n(x)\, e^{nx},$$

unde $a_0(x)$ nu este polinomul nul, este identic nulă, ajungem la o contradicție luînd limita cînd $x \to -\infty$ și aplicînd regula lui l'Hospital pentru forme nedeterminate; obținem rezultatul inacceptabil

$$\lim_{x \to -\infty} a_0(x) = 0.$$

Funcția sin x constituie un alt exemplu, deoarece, dacă suma

$$b_0(x) + b_1(x) \sin x + \ldots + b_n(x) \sin^n x,$$

unde $b_0(x)$ nu este polinomul identic nul, se anulează identic, atunci $b_0(k\pi) = 0$ pentru toți k întregi. (Contradicție.)

Alte exemple sînt (din motive similare) ln x (inversa lui e^x) și celelalte funcții trigonometrice.

Următoarele funcții, enumerate la Exemplul 10 ca funcții iraționale, sînt algebrice: $\sqrt{x}$, $|x|$ ($|x| = \sqrt{x^2}$) și $\sqrt{x^2+1}$.

12. Funcții $y = f(u)$, $u \in \boldsymbol{R}$ și $u = g(x)$, $x \in \boldsymbol{R}$, pentru care funcția compusă $y = f(g(x))$ este continuă peste tot și astfel încît

$$\lim_{u \to b} f(u) = c, \quad \lim_{x \to a} g(x) = b, \quad \lim_{x \to a} f(g(x)) \neq c.$$

Scanned with OKEN Scanner

Dacă

$$f(u) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } u \neq 0,\ u \in \boldsymbol{R}, \\ 1, & \text{dacă } u = 0, \end{cases}$$

atunci $\lim_{u \to 0} f(u) = 0$. Dacă $g(x) = 0$ pentru toți $x \in \boldsymbol{R}$, atunci $f(g(x)) = 1$ pentru orice x și deci $\lim_{x \to 0} f(g(x)) = 1$.

Acest contraexemplu devine inacceptabil dacă se adaugă următoarea condiție: $x \neq a \Rightarrow g(x) \neq b$.

13. Două funcții uniform continue al căror produs nu este uniform continuu.

Funcțiile x și $\sin x$ sînt uniform continue pe $\boldsymbol{R}$, dat fiind că derivatele lor sînt mărginite, dar produsul lor $x \sin x$ nu este uniform continuu pe $\boldsymbol{R}$.

Dacă *ambele* funcții f și g sînt mărginite pe un domeniu comun D și dacă sînt uniform continue pe D, atunci și produsul lor fg este uniform continuu pe D. Deoarece orice funcție uniform continuă pe o mulțime mărginită este mărginită pe acea mulțime, exemplul de mai sus este posibil numai atunci cînd domeniul comun luat în considerare este nemărginit și cel puțin una din funcții nu este mărginită.

14. O funcție continuă și biunivocă pe un interval și a cărei inversă nu este continuă.

Pentru acest exemplu este necesar ca intervalul să *nu* fie un interval mărginit și închis (a se vedea [34], p. 192) și ca funcția să *nu* fie strict cu valori reale (a se vedea [34], p.50, p.52, Ex.25). Exemplul din cazul de față este o funcție cu valori complexe $z = f(x)$, de variabila reală x, cu continuitate definită exact ca în cazul unei funcții cu valori reale de variabilă reală, valoarea absolută a numărului complex $z = (a, b)$ fiind definită prin:

$$|z| = |(a, b)| = (a^2 + b^2)^{1/2}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Fie funcția $f(x)$ definită prin:

$$z = f(x) = (\cos x, \sin x), \quad 0 \leqslant x < 2\pi.$$

Atunci f aplică continuu și biunivoc intervalul semideschis $[0,2\pi)$ pe cercul unitate $|z| = 1$. Dat fiind că cercul unitate este compact, aplicația inversă nu poate fi continuă (a se vedea [34], p.192), și nu este continuă în punctul (1,0).

15. O funcție continuă în fiecare punct irațional și discontinuă în fiecare punct rațional.

Dacă x este un număr rațional egal cu m/n, unde m și n sînt numere întregi cu proprietatea că fracția m/n este ireductibilă, iar $n > 0$, fie $f(x)$ definit ca fiind egal cu $1/n$. Pe de altă parte, dacă x este irațional, fie $f(x) = 0$. (Vezi [34], p.124.)

Se va vedea în Capitolul 8, Exemplul 10, că nu există o funcție continuă în fiecare punct rațional și discontinuă în fiecare punct irațional.

16. O funcție semicontinuă cu o mulțime densă de puncte de discontinuitate.

Funcția din Exemplul 15 este superior semicontinuă în fiecare punct a, deoarece

$$\overline{\lim_{x \to a}} f(x) = 0 \leqslant f(a).$$

17. O funcție cu o mulțime densă de puncte de discontinuitate, fiecare din ele fiind de discontinuitate aparentă.

Dacă a este un număr rațional și dacă funcția din Exemplul 15 este redefinită cu valoarea zero în a, atunci, deoarece

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0 = f(a),$$

funcția f devine continuă în a.

Scanned with OKEN Scanner

18. O funcție monotonă ale cărei puncte de discontinuitate formează o mulțime numerabilă arbitrară (eventual densă).

Dacă A este o mulțime arbitrară nevidă numerabilă de numere reale $a_1, a_2, a_3, \ldots$, fie Σp_n o sumă finită sau o serie convergentă infinită de numere pozitive, cu suma p (seria fiind finită, dacă și numai dacă A este finită, și avînd tot atîția termeni cîte elemente are A). Dacă A este mărginită inferior, iar x este mai mic decît orice punct al lui A, fie $f(x) = 0$. Altfel, $f(x)$ este definită ca fiind suma tuturor termenilor p_m din Σp_n cu proprietatea că $a_m \leqslant x$. Atunci $f(x)$ este crescătoare pe $\boldsymbol{R}$, continuă în fiecare punct care nu îi aparține lui A, și discontinuă, cu saltul p_n, în fiecare punct a_n (adică $\lim\limits_{x \to a_n +} f(x) - \lim\limits_{x \to a_n -} f(x) = p_n$).

Trebuie observat că acest exemplu ilustrează maximul de discontinuitate pe care-l poate realiza o funcție monotonă: pentru orice funcție monotonă mulțimea punctelor de discontinuitate este numerabilă (a se vedea [36], p. 59, Ex. 29). Exemplul 1 a arătat că, fără monotonie, mulțimea punctelor de discontinuitate poate fi întregul domeniu.

19. O funcție cu o mulțime densă de puncte de continuitate și o mulțime densă de puncte de discontinuitate dintre care nici unul nu este de discontinuitate aparentă.

În Exemplul 18, fie A mulțimea $\boldsymbol{Q}$ a tuturor numerelor raționale.

20. O corespondență biunivocă între două intervale, care nu este nicăieri monotonă.

Fie $f(x)$ definit pentru $0 \leqslant x \leqslant 1$ prin:

$$f(x) = \begin{cases} x, \text{ dacă } x \text{ este rațional,} \\ 1 - x, \text{ dacă } x \text{ este irațional.} \end{cases}$$

Atunci nu există nici un subinterval al lui $[0,1]$ pe care f să fie monotonă. Domeniul valorilor lui f este intervalul $[0,1]$, iar f este biunivocă.

Scanned with OKEN Scanner

O funcție care are aceste proprietăți și care aplică intervalul $[a,b]$ pe intervalul $[c,d]$ este

$$g(x) = \begin{cases} c + (d-c)\dfrac{x-a}{b-a}, & \text{dacă } \dfrac{x-a}{b-a} \text{ este rațional,} \\ d + (c-d)\dfrac{x-a}{b-a}, & \text{dacă } \dfrac{x-a}{b-a} \text{ este irațional.} \end{cases}$$

21. O funcție continuă care nu este nicăieri monotonă. Fie $f_1(x) = |x|$ pentru $|x| \leqslant \frac{1}{2}$; pentru alte valori ale lui x, $f_1(x)$ se definește prin prelungire periodică, cu perioada 1, adică $f_1(x+n) = f_1(x)$ pentru orice număr real x și orice număr întreg n. Pentru $n > 1$ să definim $f_n(x) = 4^{-n+1} f_1(4^{n-1}x)$, astfel încît pentru orice întreg pozitiv n, f_n este o funcție periodică cu perioada 4^{-n+1} și cu valoarea maximă $\frac{1}{2}4^{-n+1}$. În sfîrșit, definim funcția f pe $\boldsymbol{R}$ prin:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f_1(4^{n-1}x)}{4^{n-1}}.$$

Dat fiind că $|f_n(x)| \leqslant \frac{1}{2}4^{-n+1}$, seria este uniform convergentă pe $\boldsymbol{R}$ conform criteriului de convergență al lui Weierstrass, iar f este peste tot continuă. Pentru orice punct a de forma $a = k \cdot 4^{-m}$, unde k este număr întreg iar m este un întreg pozitiv, $f_n(a) = 0$ pentru $n > m$ și deci $f(a) = f_1(a) + \ldots + f_m(a)$. Pentru orice m întreg, fie h_m numărul pozitiv 4^{-2m-1}. Atunci $f_n(a + h_m) = 0$ pentru $n > 2m + 1$ și deci

$$f(a+h_m) - f(a) = [f_1(a+h_m) - f_1(a)] + \ldots + [f_m(a+h_m) - f_m(a)] + f_{m+1}(a+h_m) + \ldots + f_{2m+1}(a+h_m) \geqslant -mh_m + (m+1)h_m = h_m > 0.$$

În mod similar,

$$f(a - h_m) - f(a) \geqslant -mh_m + (m+1)h_m = h_m > 0.$$

Deoarece elementele de forma $a = k \cdot 4^{-m}$ formează o mulțime densă, rezultă că f nu este monotonă pe nici un interval deschis.

Cele spuse mai sus sînt tipice pentru construcții care implică condensarea singularităților.

22. O funcție ale cărei puncte de discontinuitate formează o mulțime închisă oarecare, dată.

Dacă A este o mulțime închisă, să definim mulțimea B astfel:

$$x \in B, \text{ dacă și numai dacă } \begin{cases} x \in F(A) \text{ sau} \\ x \in I(A) \cap \boldsymbol{Q}, \end{cases}$$

și funcția f în modul următor:

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{ dacă } x \in B. \\ 0, \text{ dacă } x \notin B \end{cases}$$

Dacă $c \in A$, f este discontinuă în c: dacă $c \in F(A)$, atunci $f(c) = 1$ și x este un punct limită al mulțimii $\boldsymbol{R} \setminus A$, pe care f este identic nulă; dacă $c \in I(A) \cap \boldsymbol{Q}$, atunci $f(x) = 1$ și c este un punct limită al mulțimii $I(A) \setminus \boldsymbol{Q}$, pe care f este identic nulă; dacă $c \in I(A) \setminus \boldsymbol{Q}$, atunci $f(c) = 0$, în timp ce c este un punct limită al mulțimii $I(A) \cap \boldsymbol{Q}$ pe care f este identic egală cu 1. Funcția f este continuă pe mulțimea $\boldsymbol{R} \setminus A$, deoarece această mulțime este deschisă și f este constantă pe ea.

23. O funcție ale cărei puncte de discontinuitate formează o mulțime F_σ oarecare, dată. (Vezi Capitolul 4, Exemplul 8 și Capitolul 8, Exemplele 8, 10 și 22.)

Se spune că o mulțime A este o mulțime F_σ, dacă și numai dacă este o reuniune numerabilă de mulțimi închise

Scanned with OKEN Scanner

(a se vedea Capitolul 8, Exemplul 8). Pentru o mulțime F_σ dată $A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots$, unde $A_1, A_2, \ldots$ sînt închise, iar $A_n \subset A_{n+1}$ pentru $n = 1, 2, \ldots$, fie A_0 mulțimea vidă $\emptyset$ și să definim mulțimile disjuncte B_n, $n = 1, 2, \ldots$ astfel

$$x \in B_n, \text{ dacă și numai dacă } \begin{cases} x \in (A_n \setminus A_{n-1}) \setminus I(A_n \setminus A_{n-1}) \\ \text{sau} \\ x \in I(A_n \setminus A_{n-1}) \cap \boldsymbol{Q}. \end{cases}$$

Fie funcția f definită de:

$$f(x) = \begin{cases} 2^{-n}, \text{ dacă } x \in B_n, \\ 0, \quad \text{dacă } x \notin B_1 \cup B_2 \cup \ldots \end{cases}$$

Dacă $c \in A$, atunci f este discontinuă în c: dacă $c \in (A_n \setminus A_{n-1}) \setminus I(A_n \setminus A_{n-1})$ atunci $f(c) = 2^{-n}$, în timp ce c este punct limită al unei mulțimi pe care f ia valori, care diferă de 2^{-n} prin cel puțin 2^{-n-1}; dacă $c \in I(A_n \setminus A_{n-1}) \cap \boldsymbol{Q}$ atunci $f(c) = 2^{-n}$, în timp ce c este un punct limită al mulțimii $I(A_n \setminus A_{n-1}) \setminus \boldsymbol{Q}$ pe care f este identic nulă; dacă $c \in I(A_n \setminus A_{n-1}) \setminus \boldsymbol{Q}$, atunci $f(c) = 0$, în timp ce c este un punct limită al mulțimii $I(A_n \setminus A_{n-1}) \cap \boldsymbol{Q}$ pe care f este identic egală cu 2^{-n}. Dacă $c \notin A$, f este o continuă în c: dacă $\varepsilon > 0$ este dat, îl alegem pe N astfel încît $2^{-N} < \varepsilon$; apoi alegem o vecinătate a lui c care exclude pe $A_1, A_2, \ldots, A_N$ și, deci, în interiorul căreia $f(x) < 2^{-N} < \varepsilon$.

Trebuie menționat faptul că pentru *orice* funcție f definită pe $\boldsymbol{R}$, cu valori în $\boldsymbol{R}$, mulțimea punctelor de discontinuitate este o mulțime F_σ (a se vedea [36], p.84, Ex. 30—33; p.332, Ex. 41).

24. O funcție care nu este limita nici unui șir de funcții continue. (Vezi Capitolul 4, Exemplul 10.)

Funcția f din Exemplul 1 are proprietatea că nu există nici un șir $\{f_n\}$ de funcții continue, astfel încît $\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = f(x)$ pentru orice x real, dar demonstrația nu este elementară. Pentru referințe și discuție a se vedea [10], pp. 99—102.

Scanned with OKEN Scanner

Ideea este că f este discontinuă peste tot, în timp ce orice funcție care este limita unui șir de funcții continue trebuie să aibă o mulțime densă de puncte de continuitate.

Funcția caracteristică a mulțimii $\boldsymbol{Q}$ a numerelor raționale este limita unui șir $\{g_n\}$ de funcții, fiecare fiind limita unui șir $\{h_n\}$ de funcții continue, în felul următor: Dacă $\{r_n\}$ este un șir care dă o corespondență biunivocă între domeniul de definiție $\boldsymbol{N}$ și domeniul valorilor $\boldsymbol{Q}$, să definim

$$g_n(x) = \begin{cases} 1, \text{ dacă } x = r_1, r_2, \ldots, \text{ sau } r_n, \\ 0, \text{ în celelalte cazuri.} \end{cases}$$

Fiecare funcție g_n este limita unui șir de funcții continue, fiecare egală cu 1 acolo unde $g_n(x) = 1$, egală cu 0 pe subintervale închise, cuprinse în interiorul intervalelor dintre punctele consecutive în care $g_n(x) = 1$ și liniară între punctele consecutive care sînt sau puncte finale ale acestor subintervale închise, sau sînt puncte în care $g_n(x) = 1$. De observat că pentru orice x, $\{g_n(x)\}$ este crescător, în timp ce șirul care converge către $g_n(x)$ poate fi ales descrescător.

25. O funcție definită pe [0,1] **astfel încît imaginea oricărui subinterval nedegenerat al lui** [0,1] **este** [0,1]. (Vezi Capitolul 8, Exemplul 27.)

H. Lebesgue a construit o funcție cu această proprietate ([28], p. 90) și funcția este descrisă în [10], p. 71 (De asemenea, [14], p.228.)

Dacă x este un număr arbitrar în [0,1], fie dezvoltarea sa zecimală

$$x = 0,a_1a_2a_3 \ldots;$$

în cazul în care x poate fi exprimat neunivoc fie printr-o fracție zecimală finită, fie printr-o fracție cu un număr infinit de cifre 9, putem lucra cu oricare din cele două dezvoltări. Pentru a preciza, să considerăm că am ales dezvoltarea cu un număr finit de termeni. Valoarea lui $f(x)$ depinde de proprietatea fracției zecimale $0,a_1a_3a_5 \ldots$ de a fi sau nu o

Scanned with OKEN Scanner

fracție periodică, adică dacă numărul $0, a_1a_3a_5 \ldots$ este sau nu rațional (a se vedea [35], p. 178):

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ dacă } 0, a_1a_3a_5 \ldots \text{ este irațional} \\ 0, a_{2n}a_{2n+2}a_{2n+4} \ldots, \text{ dacă } 0, a_1a_3a_5 \ldots \text{ este rațional și primul segment care se repetă începe cu } a_{2n-1}. \end{cases}$$

Fie I un subinterval arbitrar din $[0,1]$ și să alegem cifrele $a_1, a_2, \ldots, a_{2n-2}$ astfel încît atît $0, a_1a_2 \ldots a_{2n-2}0$ cît și $0, a_1a_2 \ldots a_{2n-2}1$ să aparțină lui I și astfel încît a_{2n-3} să difere atît de 0 cît și de 1. Dacă $y = 0, b_1b_2b_3 \ldots$ este un punct oarecare în $[0,1]$ nu avem decît să definim $a_{2n-1} = a_{2n+1} = \ldots = a_{4n-5} = 0$ și $a_{4n-3} = 1$, cu termenii a consecutivi cu indicii impari definiți prin repetarea ciclică, în grupuri de cîte n, pentru a obține un număr

$$x = 0, a_1a_2a_3 \ldots a_{2n-1}b_1a_{2n+1}b_2a_{2n+3} \ldots,$$

care aparține intervalului I și este astfel încît dezvoltarea

$$0, a_1a_3a_5 \ldots a_{2n-3}a_{2n-1}a_{2n+1} \ldots$$

este o fracție zecimală periodică a cărei primă perioadă începe cu a_{2n-1} și, deci, este astfel încît

$$f(x) = 0, b_1b_2b_3 \ldots .$$

Graficul lui f este dens în pătratul $[0,1] \times [0,1]$, deși orice segment vertical $\{x\} \times [0,1]$ intersectează graficul într-un singur punct.

Exemplul 27 din Capitolul 8 (și următorul Exemplu 26) dă o funcție al cărei domeniu de valori este $\boldsymbol{R}$, pentru orice interval deschis nevid și care este nulă aproape peste tot (deci este măsurabilă).

Deoarece intervalul unitate $[0,1]$ conține o infinitate de intervale deschise disjuncte (nici o pereche de intervale nu au puncte comune, de exemplu $\left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right), n = 1, 2, \ldots$), func-

Scanned with OKEN Scanner

ția f a acestui exemplu ia de un număr infinit de ori oricare din valorile sale. Un alt exemplu de funcție care ia de o infinitate de ori oricare valoare a sa, se poate găsi în Capitolul 10, Exemplul 9.

26. O funcție liniară discontinuă.

Se spune despre o funcție f definită pe $\boldsymbol{R}$, cu valori în $\boldsymbol{R}$, că este **liniară,** dacă și numai dacă $f(x+y)=f(x)+f(y)$ pentru toți $x, y \in \boldsymbol{R}$. O funcție care este liniară, dar *nu* este continuă, trebuie într-adevăr să fie foarte discontinuă. Într-adevăr, graficul ei trebuie să fie dens în planul $\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}$. Pentru o discuție a acestui fenomen și pentru alte referințe, a se vedea [10], pp. 108—113. Dacă f este continuă, trebuie să fie de forma $f(x)=cx$, după cum se poate arăta considerînd succesiv următoarele clase de numere $\boldsymbol{N}, \boldsymbol{Z}, \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{R}$.

Construcția unei funcții liniare discontinue se poate efectua folosind o bază Hamel în spațiul vectorial al numerelor reale $\boldsymbol{R}$ peste mulțimea numerelor raționale $\boldsymbol{Q}$ (a se vedea lucrările [29], [30] și [32] indicate în [10]). Ideea construcției constă în obținerea mulțimii $S=\{r_\alpha\}$ de numere reale r_α cu proprietatea că orice număr real x este o combinație liniară *unică* a unui număr finit de termeni din S, cu coeficienți raționali p_α: $x=p_{\alpha_1}r_{\alpha_1}+\ldots+p_{\alpha_k}r_{\alpha_k}$. Funcția f poate fi acum definită prin

$$f(x)=p_{\alpha_1}+\ldots+p_{\alpha_k},$$

dat fiind că reprezentarea lui x ca o combinație liniară este unică. Liniaritatea lui f rezultă direct din definiție, iar faptul că f nu este continuă rezultă din faptul că valorile sale sînt toate raționale dar nu toate egale (f nu are proprietatea valorii intermediare).

27. Pentru orice $n\in\boldsymbol{N}$, există $n(2n+1)$ funcții $\varphi_{ij}(x_j)$, $j=1,2,\ldots,n$, $i=1,2,\ldots,2n+1$, care satisfac condițiile:

Scanned with OKEN Scanner

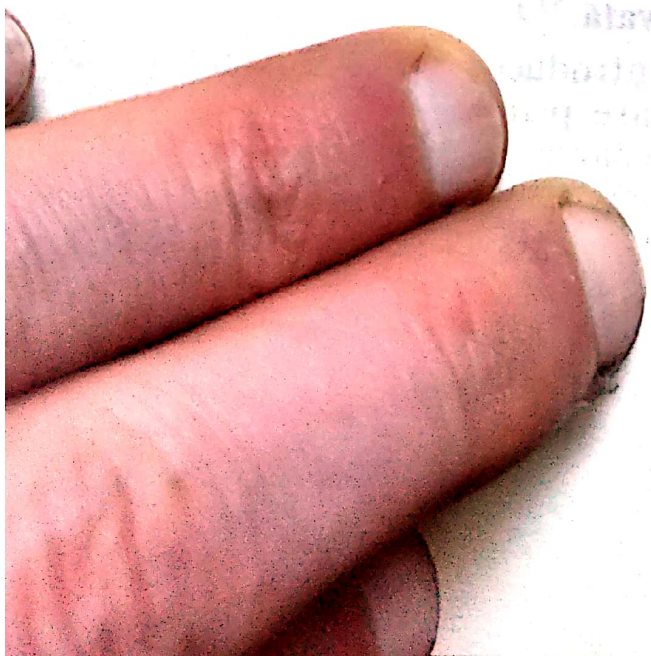
(a) Toate funcțiile $\varphi_{ij}(x_j)$ sînt continue pe $[0,1]$.
(b) Pentru orice funcție $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, continuă pentru $0 \leqslant x_1, x_2, \ldots, x_n \leqslant 1$, există $2n+1$ funcții ψ_i, $i = 1, 2, \ldots, 2n+1$, fiecare continuă pe R, astfel încît

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{2n+1} \psi_i \left(\sum_{j=1}^{n} \varphi_{ij}(x_j) \right).$$

Această teoremă se datorează lui A. N. Kolmogorov [26] și rezolvă o problemă celebră enunțată de D. Hilbert. Ca soluție a problemei (a treisprezecea) lui Hilbert, rezultatul de mai sus se enunță în modul următor: *Orice funcție continuă $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de n variabile reale, $0 \leqslant x_1, x_2, \ldots, x_n \leqslant 1$, poate fi exprimată ca o sumă (suma $\sum_{i=1}^{2n+1}$ de mai sus) de funcții compuse de funcții reale continue de o singură variabilă cu sume de funcții continue de o singură variabilă (sumele $\sum_{j=1}^{n}$ de sus).*

Demonstrația este deosebit de ingenioasă, deși este accesibilă oricărui cititor care are răbdarea de a urmări un raționament de inducție completă multiplă.

Remarcăm numai că funcțiile φ_{ij} sînt universale în sensul că ele nu depind de f. Funcțiile ψ_i, deși nu sînt independente de f, nu sînt unic determinate de f (chiar după ce au fost construite funcțiile φ_{ij}). Detalii se găsesc în referințele citate.



Scanned with OKEN Scanner

Capitolul 3

Derivarea

Introducere

În cîteva din exemplele acestui capitol aplicăm termenul *derivată* și limitelor infinite

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=+\infty,\quad \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=-\infty.$$

Totuși termenul *funcție derivabilă* este folosit numai în sensul strict al unei funcții care are o derivată finită în fiecare punct al domeniului ei. Se spune despre o funcție că este *indefinit derivabilă*, dacă și numai dacă are derivate (finite) de orice ordin, în fiecare punct al domeniului ei.

Funcția exponențială cu baza e este notată sau e^x sau $\exp(x)$. Ca și în Capitolul 2, toate mulțimile, inclusiv domeniile de definiție și domeniile valorilor, vor fi presupuse submulțimi ale lui $\boldsymbol{R}$; în caz contrar se va face mențiune explicită. Aceeași convenție este valabilă pentru toată Partea I-a a cărții, deci pînă la Capitolul 8.

1. O funcție care nu este o derivată.

Funcția signum (a se vedea Introducerea la Capitolul 1), sau orice funcție cu salturi, nu are primitive, adică nu sînt derivate ale nici unei funcții, deoarece nu are proprietatea valorii intermediare, comună funcțiilor continue și funcțiilor derivate (a se vedea [34], p.84, Ex. 40). Mai jos va fi dat un exemplu de derivată discontinuă.

Scanned with OKEN Scanner

2. O funcție derivabilă cu derivata discontinuă.

Funcția

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, \text{ dacă } x \neq 0, \\ 0 \quad\quad\quad , \text{ dacă } x = 0, \end{cases}$$

are ca derivată funcția

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}, \text{ dacă } x \neq 0, \\ 0 \quad\quad\quad\quad\quad\quad , \text{ dacă } x = 0, \end{cases}$$

care este discontinuă în origine.

3. O funcție discontinuă care are peste tot o derivată (nu neapărat finită).

Pentru acest exemplu este necesar să extindem definiția derivatei astfel încît să cuprindă și limitele $\pm \infty$. În acest caz funcția discontinuă signum (Exemplul 1) are derivata

$$g(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x \neq 0, \\ +\infty, & \text{dacă } x = 0. \end{cases}$$

4. O funcție derivabilă care are un extremum într-un punct în care derivata nu are o schimbare simplă de semn.

Funcția

$$f(x) = \begin{cases} x^4 \left(2 + \sin \frac{1}{x}\right), \text{ dacă } x \neq 0 \\ 0 \quad\quad\quad\quad\quad , \text{ dacă } x = 0 \end{cases}$$

are un minim absolut în $x = 0$. Derivata ei este

$$f'(x) = \begin{cases} x^2 \left[4x \left(2 + \sin \frac{1}{x}\right) - \cos \frac{1}{x}\right], \text{ dacă } x \neq 0, \\ 0 \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad , \text{ dacă } x = 0, \end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

și ia atît valori pozitive cît și negative în fiecare vecinătate a originii. În nici un interval de forma $(a, 0)$ sau $(0, b)$ funcția f nu este monotonă.

5. O funcție derivabilă a cărei derivată este pozitivă într-un punct, dar care nu este monotonă pe nici o vecinătate a punctului.

Funcția

$$f(x) = \begin{cases} x + 2x^2 \sin \frac{1}{x}, & \text{dacă } x \neq 0, \\ 0, & \text{dacă } x = 0 \end{cases}$$

are derivata

$$f'(x) = \begin{cases} 1 + 4x \sin \frac{1}{x} - 2 \cos \frac{1}{x}, & \text{dacă } x \neq 0, \\ 1, & \text{dacă } x = 0. \end{cases}$$

În orice vecinătate a lui 0 funcția $f'(x)$ are atît valori pozitive cît și valori negative.

6. O funcție a cărei derivată este finită, dar este nemărginită pe un interval închis.

Funcția

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x^2}, & \text{dacă } x \neq 0, \\ 0, & \text{dacă } x = 0 \end{cases}$$

are derivata

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x^2}, & \text{dacă } x \neq 0, \\ 0, & \text{dacă } x = 0, \end{cases}$$

care este nemărginită pe $[-1, 1]$.

Scanned with OKEN Scanner

7. O funcție a cărei derivată există și este mărginită, dar care nu are extreme (absolute) pe un interval închis.

Funcția

$$f(x) = \begin{cases} x^4 \, e^{-\frac{1}{4}x^2} \sin \frac{8}{x^3}, & \text{dacă } x \neq 0 \\ 0, & \text{dacă } x = 0 \end{cases}$$

are derivata

$$f'(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{4}x^2} \left[\left(4x^3 - \frac{1}{2} x^5 \right) \sin \frac{8}{x^3} - 24 \cos \frac{8}{x^3} \right], & \text{dacă } x \neq 0, \\ 0, & \text{dacă } x = 0. \end{cases}$$

În orice vecinătate a originii această derivată are valori oricît de apropiate de 24 și -24. Pe de altă parte, pentru $0 < h = |x| \leqslant 1$ (a se vedea [34] p. 83, Ex. 29),

$$0 < e^{-\frac{1}{4}x^2} < 1 - \frac{1}{4} h^2 e^{-\frac{1}{4}h^2} < 1 - \frac{3}{16} h^2,$$

și

$$\left| \left(4x^3 - \frac{1}{2} x^5 \right) \sin \frac{8}{x^3} - 24 \cos \frac{8}{x^3} \right| \leqslant 24 + \frac{9}{2} h^3.$$

De aceea $0 < h \leqslant 1$ implică

$$|f'(x)| < \left(1 - \frac{3}{16} h^2 \right) \left(24 + \frac{9}{2} h^3 \right) < 24 - \frac{9}{2} h^2 (1 - h) \leqslant 24.$$

Deci, pe intervalul închis $[-1, 1]$ domeniul valorilor funcției f' are marginea superioară egală cu 24 și marginea inferioară egală cu -24, dar funcția f' nu ia nici una din aceste valori.

8. O funcție continuă peste tot dar nicăieri derivabilă.

Funcția $|x|$ este continuă peste tot, dar nu este derivabilă în $x = 0$. Prin translatarea acestei funcții putem defini funcții continue peste tot, dar care nu sînt derivabile în nici un punct al unei mulțimi finite arbitrare dinainte dată. În paragraful

Scanned with OKEN Scanner

următor vom discuta un exemplu folosind o mulțime infinită de deplasări ale funcției $|x|$.

Funcția din Capitolul 2, Exemplul 21 nu este nicăieri derivabilă. Pentru a arăta acest lucru, fie a un număr real arbitrar, și pentru orice n întreg pozitiv, fie h_n egal sau cu 4^{-n-1} sau cu -4^{-n-1}, astfel ca $|f_n(a+h_n) - f_n(a)| = |h_n|$. Atunci $|f_m(a+h_n) - f_m(a)|$ are valoarea $|h_n|$ pentru toți $m \leqslant n$ și se anulează pentru $m > n$. De aceea, cîtul $(f(a+h_n) - f(a))/h_n$ este un număr întreg, par, dacă n este par, și impar, dacă n este impar. Rezultă că

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{f(a+h_n) - f(a)}{h_n}$$

nu există și deci $f'(a)$ nu poate exista ca limită finită.

K. W. T. Weierstrass (matematician german, 1815—1897) a dat primul exemplu de funcție continuă și nederivabilă:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b^n \cos(a^n \pi x),$$

unde b este un întreg impar iar a are proprietatea că $0 < a < 1$ și $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$. Exemplul prezentat mai sus este o modificare a celui dat în 1930 de B. L. van der Waerden (a se vedea [48], p. 353). Se știe acum că există exemple de funcții continue care nu au nicăieri derivata unilaterală finită sau infinită. Pentru discuții ulterioare ale acestor exemple și pentru referințe, a se vedea [48], pp.350—354; [10], pp.61—62, 115, 126 și [21], vol. II, pp.401—412.

Am arătat că exemplul de față, descris în Capitolul 2, Exemplul 21, nu este nicăieri monoton. Ca exemplu de funcție peste tot derivabilă și nicăieri monotonă, a se vedea [21], vol. II, pp. 412—421. Într-adevăr, acest ultim exemplu este o construcție foarte elaborată de funcție care este peste tot derivabilă și care are o mulțime densă de maxime relative și o mulțime densă de minime relative *.

*) A se vedea și A. Denjoy, Bull. Soc. Math. France, 43, 1915, pp. 161—248, 228 ș.a.

Scanned with OKEN Scanner

9. O funcție derivabilă care nu satisface teorema mediei.

Trebuie din nou să ieșim din mulțimea numerelor reale ca mulțime de valori ale funcției. Funcția cu valori complexe, de variabilă reală x

$$f(x) = \cos x + i \sin x,$$

este peste tot continuă și derivabilă (a se vedea [34], pp. 509—513), dar nu există a, b și ξ astfel ca $a < \xi < b$ și $(\cos b + i \sin b) - (\cos a + i \sin a) = (-\sin \xi + i \cos \xi) \times (b - a)$. Admițînd că egalitatea de mai sus *ar putea* fi satisfăcută, să egalăm pătratele modulelor (valorilor absolute) ale celor doi termeni:

$$(\cos b - \cos a)^2 + (\sin b - \sin a)^2 = (b - a)^2$$

sau, cu ajutorul unor identități elementare

$$\sin^2 \frac{b-a}{2} = \left(\frac{b-a}{2}\right)^2.$$

Deoarece nu există nici un număr pozitiv h astfel că $\sin h = h$ (a se vedea [34], p.78), am ajuns la o contradicție.

10. O funcție de x, indefinit derivabilă, care este pozitivă pentru x pozitiv și care se anulează pentru x negativ.

Funcția

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{dacă } x > 0, \\ 0, & \text{dacă } x \leqslant 0, \end{cases}$$

este indefinit derivabilă, toate derivatele ei în $x = 0$ fiind egale cu 0 (a se vedea [34], p. 108, Ex. 52).

Scanned with OKEN Scanner

11. O funcție indefinit derivabilă, pozitivă în intervalul unitate și nulă în afara lui.

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2(1-x)^2}}, & \text{dacă } 0 < x < 1, \\ 0, & \text{în celelalte cazuri.} \end{cases}$$

12. O „funcție de legătură", indefinit derivabilă, egală cu 1 pe $[1, +\infty)$ și egală cu 0 pe $(-\infty, 0]$, strict monotonă pe $[0,1]$.

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left[-\frac{1}{x^2}\exp\left(-\frac{1}{(1-x)^2}\right)\right], & \text{dacă } 0 < x < 1, \\ 0, & \text{dacă } x \leqslant 0, \\ 1, & \text{dacă } x \geqslant 1. \end{cases}$$

13. O funcție f monotonă, indefinit derivabilă, cu proprietatea că

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0, \lim_{x\to+\infty} f'(x) \neq 0.$$

Dacă renunțăm la cuvîntul „monoton", găsim exemple banale, ca $\frac{\sin x^2}{x}$. Ca exemplu de funcție monotonă, fie $f(x)$ definită ca fiind egală cu 1 pentru $x \leqslant 1$, egală cu $1/n$ pe intervalul închis $[2n-1, 2n]$, pentru $n = 1, 2, \ldots$, și pe celelalte intervale $(2n, 2n+1)$, $f(x)$ este definită prin deplasarea funcției „de legătură" din Exemplul 12, folosind factori negativi corespunzători pentru schimbările pe scara verticală.

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul 4

Integrala Riemann

Introducere

Vor fi presupuse cunoscute definiția integrabilității Riemann și a integralei Riemann (sau definite) a unei funcții f, definită pe un interval închis $[a, b]$, împreună cu principalele proprietăți elementare ale acestei integrale. Vom presupune același lucru și despre integralele improprii clasice și, în Exemplul 14, despre integrala Riemann-Stieltjes.

În cîteva din exemplele acestui capitol este necesară noțiunea de măsură nulă. Se spune despre o mulțime $A \subset \boldsymbol{R}$ că are **măsură nulă,** dacă și numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există o acoperire deschisă a lui A care constă dintr-o familie numerabilă de intervale deschise, ale căror lungimi formează o serie convergentă infinită, cu suma mai mică decît ε. Interiorul oricărei mulțimi de măsură nulă este mulțimea vidă. Se spune despre o proprietate punctuală că este valabilă **aproape peste tot** dacă mulțimea punctelor în care proprietatea *nu* este valabilă are măsura nulă. O funcție f al cărei domeniu este un interval închis $[a, b]$ este integrabilă Riemann pe acest domeniu, dacă și numai dacă este mărginită și continuă aproape peste tot (a se vedea [36], p.153, Ex.54).

1. O funcție mărginită definită pe un interval închis, care nu este integrabilă Riemann pe acest interval.

Restricția la intervalul [0,1] a funcției caracteristice a mulțimii $\boldsymbol{Q}$ a numerelor raționale nu este integrabilă Riemann pe [0,1] (a se vedea [34], p.112).

Scanned with OKEN Scanner

2. O funcție integrabilă Riemann care nu are primitivă.

Funcția signum (Capitolul 3, Exemplul 1), restrînsă la intervalul $[-1, 1]$ este integrabilă pe acest interval, dar nu are primitivă.

3. O funcție integrabilă Riemann care nu are primitivă pe nici un interval.

Dacă în Exemplul 18 din Capitolul 2 punem $A = \boldsymbol{Q} \cap [0, 1]$, funcția f va fi integrabilă pe $[0, 1]$, deoarece este monotonă pe acest interval. Totuși această funcție nu are primitivă pe nici un subinterval al lui $[0, 1]$, deoarece mulțimea punctelor ei de discontinuitate de prima specie este densă pe acest interval.

4. O funcție care are primitivă pe un interval închis, dar nu este integrabilă Riemann pe acest interval. (Vezi Capitolul 8, Exemplul 35.)

Funcția f din Capitolul 3, Exemplul 6, este un exemplu de funcție care are o derivată (finită) $g(x)$ în fiecare punct x al unui interval închis I. De aceea, funcția g are o primitivă, dar deoarece g nu este mărginită, ea nu este integrabilă Riemann pe I.

Cele două exemple precedente (Exemplele 3 și 4) sînt interesante datorită legăturii cu teorema fundamentală a calculului diferențial și integral. Unul din enunțurile acestei teoreme afirmă că dacă o funcție $f(x)$

(*i*) *este integrabilă* pe intervalul $[a, b]$, și

(*ii*) *are o primitivă* $F(x)$ pe acest interval ($F'(x) = f(x)$ pentru $a \leqslant x \leqslant b$), atunci integrala Riemann a lui $f(x)$ poate fi evaluată cu formula $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$.

Al doilea enunț al acestei teoreme afirmă că dacă o funcție f este *continuă* pe un interval $[a, b]$, atunci sînt adevărate atît (*i*) cît și (*ii*), $G(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ fiind o primitivă speci-

Scanned with OKEN Scanner

fică, și pentru *orice* primitivă $F(x)$ avem $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$. În cea de a treia formulare teorema se enunță la fel ca în prima, cu deosebirea că se cere ca funcția $F(x)$ să fie continuă pe $[a, b]$ și să aibă o derivată continuă $F'(x)$ pe $[a, b]$ care să coincidă cu $f(x)$ pe $[a, b]$, eventual cu excepția unui număr finit de puncte.

5. O funcție integrabilă Riemann având o mulțime densă de puncte de discontinuitate.

Exemplul 3 conține o funcție monotonă cu proprietățile specificate.

Exemplul 15 din Capitolul 2 conține o funcție nicăieri monotonă, care are proprietățile specificate. În acest ultim caz $\int_a^b f(x)\,dx = 0$ pentru orice a și b.

6. O funcție f cu proprietatea că $g(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ este derivabilă peste tot, având derivata diferită de $f(x)$ pe o mulțime densă.

Dacă f este funcția din Capitolul 2, Exemplul 15, (a se vedea Exemplul 5 de mai sus) atunci $g(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ este identic nulă; de aceea, $g'(x) = 0$ pentru toți x. Deci $g'(x) = f(x)$, dacă și numai dacă x este irațional.

7. Două funcții semicontinue, diferite, cu proprietatea că distanța dintre ele este nulă.

În cazul de față **distanța** d dintre două funcții f și g integrabile pe $[a, b]$ este, prin definiție, integrala modulului diferenței lor:

$$d = \int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx.$$

Scanned with OKEN Scanner

Dacă f este funcția semicontinuă din exemplul precedent (a se vedea Capitolul 2, Exemplul 16), și dacă g este identic nulă, atunci $f(x)$ și $g(x)$ sînt distincte pentru toate valorile raționale ale lui x (astfel funcțiile f și g sînt hotărît distincte) iar distanța d definită mai sus este nulă.

8. O funcție integrabilă Riemann, avînd ca mulțime de puncte de discontinuitate o mulțime F_σ arbitrară, dată, de măsură nulă. (Vezi Capitolul 8, Exemplul 22.)

Ca și în Exemplul 23 din Capitolul 2, fie A o mulțime F_σ dată, de măsură nulă, $A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots$, unde $A_1, A_2, \ldots$ sînt mulțimi închise pe un interval $[a, b]$ iar $A_n \subset A_{n+1}$ pentru $n = 1, 2, \ldots$. Fie A_0 mulțimea vidă $\emptyset$ și să definim funcția f:

$$f(x) = \begin{cases} 2^{-n}, & \text{dacă } x \in A_n \setminus A_{n-1}, \\ 0, & \text{dacă } x \notin A. \end{cases}$$

Dacă $c \in A$, f este discontinuă în c: dacă $c \in A_n \setminus A_{n-1}$, avînd în vedere că $A_n \setminus A_{n-1}$ este o mulțime de măsură nulă, înseamnă că $A_n \setminus A_{n-1}$ nu are puncte interioare, și c este punct limită al unei mulțimi pe care f ia valori care diferă de 2^{-n} prin cel puțin 2^{-n-1}. Dacă $c \notin A$, f este continuă în c: dacă $\varepsilon > 0$ este dat, alegem pe N astfel că $2^{-N} < \varepsilon$; apoi alegem o vecinătate a lui c care exclude pe $A_1, A_2, \ldots, A_n$ și în interiorul căreia deci $f(x) < 2^{-N} < \varepsilon$.

9. O funcție integrabilă Riemann de o funcție integrabilă Riemann, care nu este integrabilă Riemann. (Vezi Capitolul 8, Exemplul 34.)

Dacă $f(x) = 1$ cînd $0 < x \leqslant 1$ și $f(0) = 0$, și dacă g este funcția f din Capitolul 2, Exemplul 15, restrînsă la intervalul închis $[0, 1]$, atunci $f(g(x))$ este restricția la $[0, 1]$ a funcției caracteristice a mulțimii $\boldsymbol{Q}$ a numerelor raționale, egală cu 1 dacă x este rațional și egală cu 0 cînd x este irațional. (Vezi Exemplul 1 din acest capitol.)

Scanned with OKEN Scanner

10. O limită a unui șir monoton și mărginit de funcții integrabile Riemann, care nu este integrabilă Riemann (Vezi Capitolul 8, Exemplul 33.)

Șirul $\{g_n\}$, definit în Exemplul 24 din Capitolul 2, restrîns la intervalul închis $[0, 1]$, este un șir crescător de funcții integrabile Riemann, adică pentru orice $x \in [0, 1]$, $g_n(x) \leqslant g_{n+1}(x)$ pentru $n = 1, 2, \ldots$. Dacă $g(x) = \lim_{n \to +\infty} g_n(x)$ pentru $x \in [0, 1]$, atunci g este restricția la intervalul închis $[0, 1]$ a funcției caracteristice a numerelor raționale și, de aceea, g nu este integrabilă Riemann pe $[0, 1]$.

11. O integrală improprie divergentă care are valoarea principală în sensul lui Cauchy finită.

Integrala improprie $\int_{-\infty}^{+\infty} x \, dx$ este divergentă, dar valoarea ei principală în sensul lui Cauchy (a se vedea [34], p.145, Ex.30) este

$$\lim_{a \to +\infty} \int_{a}^{a} x \, dx = \lim_{a \to +\infty} 0 = 0$$

12. O integrală improprie convergentă pe $[1, +\infty)$, al cărei integrand este pozitiv, continuu și nu tinde către zero la infinit.

Pentru orice întreg $n > 1$ fie $g(n) = 1$ și definim pe g astfel încît g este liniară pe intervalele închise $[n - n^{-2}, n]$ și $[n, n + n^{-2}]$ și nulă în capetele care nu sînt numere întregi. În sfîrșit, să definim pe $g(x)$ ca fiind nulă pentru $x \geqslant 1$, acolo unde $g(x)$ nu este încă definită. Atunci funcția

$$f(x) = g(x) + \frac{1}{x^2}$$

Scanned with OKEN Scanner

este pozitivă și continuă pentru $x \geqslant 1$, afirmația $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$ este falsă, iar integrala improprie

$$\int_1^{+\infty} f(x)\, dx$$

converge.

Dacă condiția de pozitivitate este omisă, atunci un exemplu simplu, care să satisfacă celelalte cerințe (a se vedea [34], p.146, Ex.43), este

$$\int_1^{+\infty} \cos x^2\, dx.$$

13. O integrală improprie convergentă pe $[0, +\infty)$, al cărei integrand este nemărginit în fiecare interval de forma $[a, +\infty)$, unde $a > 0$.

Integrala improprie $\int_0^{+\infty} x \cos x^4\, dx$ satisface aceste condiții. (Vezi [34], p.146, Ex.43.)

Putem construi un exemplu, în care integrandul este pretutindeni pozitiv și continuu, prin analogie cu Exemplul 12, punînd $g(n) = n$ și considerînd intervalele închise $[n - n^{-3}, , n]$ și $[n, n + n^{-3}]$.

14. Două funcții f și g cu proprietatea că f este integrabilă Riemann-Stieltjes în raport cu g, atît pe $[a, b]$ cît și pe $[b, c]$, dar nu și pe $[a, c]$.

Fie

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } 0 \leqslant x < 1, \\ 1, & \text{dacă } 1 \leqslant x \leqslant 2, \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 1, & \text{dacă } 1 < x \leqslant 2, \end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

și fie $a = 0$, $b = 1$ și $c = 2$. Atunci

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}g(x) = 0, \quad \int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}g(x) = 1,$$

dar, dat fiind că f și g au un punct comun de discontinuitate în $x = 1$,

$$\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}g(x)$$

nu există (vezi [34], p.151, Ex.10).

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul 5

Şiruri

Introducere

Noţiunile de *şir*, *şir Cauchy*, *convergenţă* şi *divergenţă* sînt definite în Introducerea la Capitolul 1. *Limitele superioară* şi *inferioară* într-un punct (finit) pentru funcţii sînt definite în Introducerea la Capitolul 2. Vom presupune cunoscute formulările corespunzătoare pentru şiruri de numere reale. Primele şase exemple ale capitolului de faţă se referă numai la şiruri de numere reale. Pentru asemenea şiruri trebuie să subliniem că deşi cuvîntul *limită* este utilizat cîteodată chiar alături de cuvîntul *infinită*, noţiunea de *convergent* implică întotdeauna o limită *finită*. În Exemplul 7 vom presupune că cititorul este familiarizat cu definiţia şi proprietăţile elementare ale *convergenţei uniforme* de funcţii. Convergenţa şi divergenţa pentru *şiruri de mulţimi* sînt definite în Exemplul 8, pentru a fi utilizate în Exemplele 8 şi 9. În tot cuprinsul cărţii cuvîntul *şir* (singur) va avea semnificaţia de *şir infinit*, dacă nu există altă menţiune specială.

1. Şiruri mărginite divergente.

Cel mai simplu exemplu de şir mărginit divergent ar putea fi

$$0,\ 1,\ 0,\ 1,\ \ldots,$$

sau $\{a_n\}$, unde $a_n = 0$ cînd n este impar şi $a_n = 1$ cînd n este par. Echivalent, $a_n = \frac{1}{2}\,(1 + (-1)^n)$.

Scanned with OKEN Scanner

Un exemplu mai complex este șirul $\{r_n\}$ al numerelor raționale din $[0, 1]$, adică $\{r_n\}$ este o corespondență biunivocă cu domeniul de definiție N și domeniul valorilor $Q \cap [0, 1]$.

2. Un șir a cărui mulțime de puncte limită este o mulțime oarecare, închisă, dată.

Orice punct care este limita unui subșir al șirului $\{a_n\}$ este un **punct limită** al șirului. Orice punct limită al domeniului valorilor șirului este punct limită al șirului, dar reciproca nu este în general adevărată. Contraexemplu: șirul alternant 0, 1, 0, 1, ... are două puncte limită 0 și 1, dar domeniul valorilor sale nu are nici unul.

Din faptul că mulțimea tuturor punctelor limită ale unui șir $\{a_n\}$ este închiderea domeniului valorilor lui $\{a_n\}$*) rezultă că această mulțime este totdeauna închisă. Următorul exemplu arată că *orice* mulțime închisă A poate fi obținută pe această cale; de fapt A este mulțimea punctelor limită ale unui șir $\{a_n\}$ de puncte *distincte*. Va rezulta că A nu este numai mulțimea punctelor limită ale *șirului* $\{a_n\}$ ci și mulțimea punctelor limită (punctelor de acumulare) ale domeniului valorilor șirului.

Dacă A este mulțimea vidă, fie $a_n = n$ pentru $n = 1, 2, \ldots$. Fie acum A o mulțime nevidă, închisă, arbitrară (de numere reale) și fie $\{r_n\}$ o aranjare, într-un șir de termeni distincți, a mulțimii Q a tuturor numerelor raționale ($\{r_n\}$ este o corespondență biunivocă având pe Q ca domeniu de valori). Șirul $\{a_n\}$, a cărui mulțime de puncte limită este A, va fi un subșir al lui $\{r_n\}$ definit prin recurență în modul următor: începem prin a partiționa pe R în patru intervale

*) Afirmația nu este adevărată: pentru șirul $a_n = n^{-1}$, $n = 1, 2 \ldots$, numărul 0 este singurul punct limită al șirului, domeniul valorilor este mulțimea $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right\}$, iar închiderea domeniului valorilor este mulțimea $\left\{0, 1, \frac{1}{2}, \ldots\right\}$. Totuși este adevărat faptul că mulțimea punctelor limită ale unui șir oarecare este închisă. —*N.T.*

Scanned with OKEN Scanner

disjuncte $(-\infty, -1)$, $[-1, 0)$, $[0, 1)$ și $[1, +\infty)$. Dacă $A \cap (-\infty, -1) \neq \emptyset$, fie a_1 primul termen al șirului $\{r_n\}$ care aparține lui $(-\infty, -1)$; dacă $A \cap (-\infty, -1) = \emptyset$ și $A \cap [-1, 0) \neq \emptyset$, fie a_1 primul termen din $\{r_n\}$ care aparține lui $[-1, 0)$; dacă $A \cap (-\infty, 0) = \emptyset$ și $A \cap [0, 1) \neq \emptyset$, fie a_1 primul termen $\in [0, 1)$; în sfîrșit, dacă $A \cap (-\infty, 1) = \emptyset$, fie a_1 primul termen $\in [1, +\infty)$. După ce a_1 a fost astfel ales, a_2, distinct de a_1, este determinat în mod similar, considerînd intervalele $[-1, 0)$, $[0, 1)$ și $[1, +\infty)$ pe rînd; dacă $A \cap [-1, +\infty) = \emptyset$ numai a_1 poate fi determinat în această etapă. În orice caz, *cel puțin* un termen a_1 și *cel mult* patru termeni a_1, a_2, a_3, a_4, pot fi determinați pe această cale. În a doua etapă se procedează similar, în funcție de partiția lui $\boldsymbol{R}$ în $2 \cdot 2^2 + 2 = 10$ intervale $(-\infty, -2), \left[-2, -\frac{3}{2}\right), \ldots, \left[\frac{3}{2}, 2\right), [2, +\infty)$. Cu fiecare pas, după ce au fost aleși $a_1, a_2, \ldots, a_n$, termenul a_{n+1} este ales din intervalul I, dacă $A \cap I \neq \emptyset$, ca fiind primul termen al lui $\{r_n\}$ *diferit de cei deja aleși*, conținut în I. Partiția k în $k \cdot 2^k + 2$ intervale constă din $(-\infty, k)$, $[-k, -k + 2^{-k+1}), \ldots, [k - 2^{-k+1}, k), [k, +\infty)$. Nu este greu de arătat că șirul $\{a_n\}$ astfel definit are proprietățile dorite. Să observăm că dacă $A = \boldsymbol{R}$, atunci $\{a_n\}$ este o corespondență biunivocă pe $\boldsymbol{Q}$, probabil diferită de $\{r_n\}$.

3. Un șir divergent $\{a_n\}$ pentru care $\lim_{n \to +\infty} (a_{n+p} - a_n) = 0$ pentru orice întreg pozitiv p.

Fie a_n cea de a n-a sumă parțială a seriei armonice

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}.$$

Atunci $\{a_n\}$ este divergentă, dar pentru $p > 0$

$$a_{n+p} - a_n = \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{n+p} \leqslant \frac{p}{n+1} \to 0.$$

Este important să observăm că limita nulă $\lim_{n \to \infty} (a_{n+p} - a_n) = 0$, *nu este* uniformă în raport cu p. Într-adevăr, pentru ca

Scanned with OKEN Scanner

proprietatea enunțată să fie adevărată, această limită *nu poate* să fie uniformă în raport cu p, deoarece afirmația că ea *este* uniformă în raport cu p este echivalentă cu criteriul lui Cauchy pentru convergența unui șir (a se vedea [34], p. 447, Ex. 43).

Ideea principală a alineatului precedent poate fi exprimată și în forma următoare. Dacă $\{a_n\}$ este divergent, atunci există un șir strict crescător $\{p_n\}$ de întregi pozitivi, astfel încît $(a_{n+p_n} - a_n) \not\to 0$. În cazul particular al șirului sumelor parțiale ale seriei armonice ca șir $\{p_n\}$ putem alege chiar pe $\{n\}$, deoarece

$$a_{n+p_n} - a_n = \frac{1}{n+1} + \ldots \frac{1}{n+n} \geqslant \frac{n}{n+n} = \frac{1}{2}.$$

Exemplul următor este legat de un alt aspect al acestei chestiuni (cu $\varphi(n) = n + p_n$).

4. Fiind dat un șir arbitrar strict crescător $\{\varphi_n\} = \{\varphi(n)\}$ de întregi pozitivi, există un șir divergent $\{a_n\}$ cu proprietatea că $\lim_{n\to+\infty} (a_{\varphi(n)} - a_n) = 0$.

Prin inducție, $\varphi(n) \geqslant n$ pentru toți $n = 1, 2, \ldots$; mai general, $\varphi(n + k) \geqslant n + \varphi(k)$ pentru toți n și $k = 1, 2, \ldots$. De aceea, $\lim_{n\to+\infty} \varphi(n) = +\infty$. Pot fi considerate două cazuri.

Dacă $\varphi(n) - n$ este mărginit, de exemplu $\varphi(n) - n \leqslant K$ pentru toți $n = 1, 2 \ldots$, atunci ca șir $\{a_n\}$ putem alege șirul sumelor parțiale ale seriei armonice, deoarece

$$a_{\varphi(n)} - a_n = \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{\varphi(n)} \leqslant \frac{K}{n+1} \to 0.$$

Dacă $\varphi(n) - n$ nu este mărginit, atunci fie k cel mai mic întreg pozitiv cu proprietatea că $\varphi(k) > k$; să definim pe a_n ca fiind egal cu 1, dacă $n = k$, $\varphi(k)$, $\varphi(\varphi(k))$, ..., și egal cu 0 în celelalte cazuri. Deoarece $\{\varphi(n)\}$ este strict crescător, există un subșir al lui $\{a_n\}$, identic egal cu 1; de-

Scanned with OKEN Scanner

oarece $\varphi(n) - n$ nu este mărginit, există un subșir al lui $\{a_n\}$, identic egal cu 0. Deci $\{a_n\}$ este divergent. Pe de altă parte, $a_{\varphi(n)} = a_n$ pentru orice $n = 1, 2, \ldots$, și deci $a_{\varphi(n)} - a_n \to 0$.

Acest exemplu poate fi generalizat pe mai multe căi. Este suficient să admitem numai că $\varphi(n) \to +\infty$ cînd $n \to \infty$ și, concomitent, putem cere ca $\{a_n\}$ să nu fie mărginit. Spațiul destinat lucrării nu ne permite să includem detalii.

5. Șiruri $\{a_n\}$ și $\{b_n\}$ cu proprietățile $\underline{\lim}\, a_n + \underline{\lim}\, b_n < \underline{\lim}\,(a_n + b_n) < \underline{\lim}\, a_n + \overline{\lim}\, b_n < \overline{\lim}\,(a_n + b_n) < \overline{\lim}\, a_n + \overline{\lim}\, b_n$.

Fie $\{a_n\}$ și $\{b_n\}$ șirurile cu cicluri de cîte 4 termeni care se repetă

$\{a_n\}$: 0, 1, 2, 1, 0, 1, 2, 1, 0, 1, 2, 1, 0, 1, 2, 1, ...

$\{b_n\}$: 2, 1, 1, 0, 2, 1, 1, 0, 2, 1, 1, 0, 2, 1, 1, 0, ...

Atunci inegalitățile de mai sus revin la

$$0 < 1 < 2 < 3 < 4.$$

6. Șiruri $\{a_{1n}\}$, $\{a_{2n}\}$, ..., cu proprietățile

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\,(a_{1n} + a_{2n} + \ldots) > \overline{\lim_{n\to+\infty}}\, a_{1n} + \overline{\lim_{n\to+\infty}}\, a_{2n} + \ldots .$$

Ca exemplu putem alege $a_{mn} = 1$, dacă $m = n$, și $a_{mn} = 0$, dacă $m \neq n$, $m, n = 1, 2, \ldots$, și toate seriile infinite implicate converg. Inegalitatea enunțată mai sus devine: $1 > 0$.

De observat că inegalitatea stabilită în acest exemplu este irealizabilă în cazul unui număr finit de șiruri. De exemplu,

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\,(a_n + b_n) \leqslant \overline{\lim_{n\to+\infty}}\, a_n + \overline{\lim_{n\to+\infty}}\, b_n.$$

(A se vedea [34], p. 59. Ex. 19.)

Scanned with OKEN Scanner

7. Două șiruri uniform convergente de funcții pentru care șirul produs nu converge uniform.

Pe un domeniu comun D oarecare fie f o funcție nemărginită oarecare și definim șirurile $\{f_n\}$ și $\{g_n\}$ prin:

$$f_n(x) = f(x),\ g_n(x) = 1/n.$$

Atunci $f_n \to f$ și $g_n \to 0$ uniform pe D, dar $f_n g_n \to 0$ neuniform pe D. Un exemplu specific este furnizat de $D = \boldsymbol{R}$, $f(x) = x$.

Trebuie observat că dacă ambele șiruri sînt mărginite și converg uniform pe D, atunci șirul produs converge și el uniform pe D.

8. Un șir divergent de mulțimi.

Limita superioară și **limita inferioară** ale unui șir $\{A_n\}$ de mulțimi sînt definite și notate astfel

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} A_n = \bigcap_{n=1}^{+\infty} [\bigcup_{m=n}^{+\infty} A_m], \text{ respectiv } \underline{\lim_{n\to+\infty}} A_n = \bigcup_{n=1}^{+\infty} [\bigcap_{m=n}^{+\infty} A_m].$$

Un șir $\{A_n\}$ este **convergent,** dacă și numai dacă $\overline{\lim_{n\to+\infty}} A_n = \underline{\lim_{n\to+\infty}} A_n$ și, în acest caz, converge către această limită comună. Un șir de mulțimi este **divergent,** dacă și numai dacă nu este convergent. Deoarece $\overline{\lim_{n\to+\infty}} A_n = \{x \mid x \in$ o infinitate de mulțimi $A_n\}$, iar $\underline{\lim_{n\to+\infty}} A_n = \{x \mid x \in A_n$, cu excepția unui număr finit de $A_n\}$, șirul alternant $A, B, A, B, A, B, \ldots$ are limita superioară egală cu reuniunea $A \cup B$ și limita inferioară egală cu intersecția $A \cap B$. Un asemenea șir converge, dacă și numai dacă $A = B$.

Analogia strînsă dintre aceste exemple și șirul alternant $\{a, b, a, b, \ldots\}$ de numere (a se vedea Exemplul 1) nu trebuie scăpată din vedere.

Scanned with OKEN Scanner

9. Un șir $\{A_n\}$ de mulțimi care converge către mulțimea vidă, dar ale căror numere cardinale $\to +\infty$.

Fie A_n definit ca șirul de n numere pozitive și întregi mai mari decît, sau egale cu n și mai mici decît $2n$,

$$A_n = \{m \mid m \in \boldsymbol{N},\ n \leqslant m < 2n\},\ n = 1, 2, \ldots$$

Deoarece nici un întreg pozitiv nu aparține unei mulțimi infinite de mulțimi din $\{A_n\}$, atît limita superioară cît și limita inferioară sînt vide.

Exemplul precedent poate fi concretizat gîndindu-ne la plasarea de perechi de mingi de biliard, numerotate cu 0, 1, , 2, ..., într-o urnă, însoțită de extragerea repetată a unei mingi. De exemplu, cu un minut înainte de amiază, mingile numerotate cu 0 și 1 sînt introduse în urnă iar mingea numărul 0 este extrasă. Cu $\frac{1}{2}$ de minut înainte de amiază sînt introduse mingile cu numerele 2 și 3 și este extrasă mingea cu numărul 1. Cu $\frac{1}{3}$ de minut înainte de amiază sînt introduse mingile cu numerele 4 și 5 și este extrasă mingea numărul 2. Continuînd acest proces se pune în mod firesc întrebarea: „Cîte mingi există la amiază în urnă"? Răspuns: „Nici una".

Dat fiind că numerele naturale sînt în corespondență biunivocă ca inversele lor, și dat fiind că toate mulțimile finite sînt compacte ca submulțimi ale lui $\boldsymbol{R}$ (închise și mărginite), toate mulțimile A_n ale acestui exemplu sînt compacte; putem chiar admite că sînt *uniform* mărginite (conținute în același interval mărginit). Dacă presupunem că $\{A_n\}$ este *descrescător* ($A_{n+1} \subset A_n$ pentru $n = 1, 2, \ldots$), atunci limita $\lim\limits_{n \to +\infty} A_n$ coincide cu intersecția $\bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} A_n$ și poate fi vidă chiar cînd cardinalul fiecărei A_n este infinit și chiar dacă fiecare A_n este mărginită $\left(\text{exemplu: } \left\{\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \ldots\right\}\right)$, sau închisă (exemplu: $\{n, n+1, \ldots\}$), dar *nu* cînd sînt *ambele* proprietăți îndeplinite (a se vedea [34], p.201).

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul 6

Serii infinite

Introducere

Cu excepția cazurilor în care se va menționa în mod explicit contrariul, vom presupune peste tot, în cursul acestui capitol, că seriile cu care avem de a face sînt reale, adică termenii seriilor sînt numere reale. Dacă $\{s_n\}$ este șirul sumelor parțiale ale unei serii infinite $\sum a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$, adică $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ pentru $n = 1, 2, \ldots$ se spune că seria $\sum a_n$ este **convergentă,** dacă și numai dacă $\lim\limits_{n \to +\infty} s_n$ există și este finită. Această limită s se numește **suma** seriei $\sum a_n$ și este notată

$$\sum a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n = s.$$

Se spune că seria $\sum a_n$ este **divergentă,** dacă și numai dacă nu este convergentă, adică dacă și numai dacă $\lim\limits_{n \to +\infty} s_n$ este infinită sau nu există. Propoziția $\sum a_n = +\infty$ înseamnă că $\lim\limits_{n \to +\infty} s_n = +\infty$. Un șir $\{a_n\}$ sau o serie $\sum a_n$ este **nenegativă** sau **pozitivă,** dacă și numai dacă $a_n \geqslant 0$ pentru orice n sau, respectiv, $a_n > 0$ pentru orice n. Pentru o serie $\sum a_n$, nenegativă, afirmația $\sum a_n < +\infty$ înseamnă că seria este convergentă și afirmația $\sum a_n = +\infty$ arată că seria este divergentă.

În anumite scopuri, seriile pot să înceapă cu un termen a_0, în care caz $\sum a_n$ trebuie interpretată ca $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$, sau ca sumă

a acestei serii. Pentru o serie de puteri $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, termenul $a_0 x^0$ trebuie înțeles ca a_0, chiar cînd $x = 0$; adică în cazul de față $0^0 = 1$. Pentru o serie MacLaurin

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n,$$

termenul cu $n = 0$ este chiar $f(0)$; cu alte cuvinte, $f^{(0)}(x) = f(x)$.

1. O serie divergentă al cărei termen general tinde către zero. Seria armonică $\Sigma 1/n$.

2. O serie convergentă Σa_n și o serie divergentă Σb_n cu proprietatea că $a_n \geqslant b_n$, $n = 1, 2, \ldots$.

Fie $a_n = 0$ și $b_n = -1/n$, $n = 1, 2, \ldots$.

3. O serie convergentă Σa_n și o serie divergentă Σb_n cu proprietatea că $|a_n| \geqslant |b_n|$, $n = 1, 2, \ldots$.

Fie Σa_n seria armonică alternată semiconvergentă $\Sigma \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ și fie Σb_n seria armonică divergentă $\Sigma \frac{1}{n}$.

4. Pentru o serie pozitivă, arbitrară, dată, o serie dominată divergentă sau o serie dominată convergentă.

Se spune că seria Σa_n nenegativă, **domină** o serie Σb_n, dacă și numai dacă $a_n \geqslant |b_n|$ pentru $n = 1, 2, \ldots$. Dacă seria pozitivă dată este Σb_n, fie $a_n = b_n$, pentru $n = 1, 2, \ldots$. Atunci, dacă Σb_n diverge, ea domină seria divergentă Σa_n și dacă Σb_n converge, ea este dominată de seria convergentă Σa_n. Inegalitățile de dominare pot deveni stricte cu ajutorul factorilor $\frac{1}{2}$ și 2.

Scanned with OKEN Scanner

Acest rezultat simplu poate fi formulat după cum urmează: *Nu există nici o serie pozitivă care să poată fi utilizată simultan atît în criterii comparative de convergență cît și în criterii comparative de divergență.* (A se vedea Exemplul 19, mai jos.)

5. O serie convergentă cu o rearanjare divergentă.

În orice serie Σa_n semiconvergentă, ca de exemplu seria armonică alternată $\Sigma(-1)^{n+1}/n^{-1}$, termenii pot fi rearanjați în așa fel încît noua serie să conveargă către orice sumă, sau este divergentă. Se pot găsi rearanjări divergente cu proprietatea că șirul $\{s_n\}$ al sumelor parțiale are limita $+\infty$, limita $-\infty$, sau nu are limită. În realitate, șirul $\{s_n\}$ poate fi determinat în așa fel încît mulțimea punctelor sale limită să coincidă cu un interval arbitrar, închis, mărginit sau nu, dat dinainte (a se vedea Capitolul 5, Exemplul 2). Motivul pentru care faptul este posibil este că seria termenilor pozitivi din Σa_n și seria termenilor negativi din Σa_n sînt ambele divergente.

Concret, vom indica o rearanjare a seriei $\Sigma(-1)^{n+1}/n$ cu proprietatea că mulțimea punctelor limită ale șirului $\{s_n\}$ al sumelor parțiale este intervalul închis $[a, b]$. Începem cu termenul 1 și adăugăm termenii negativi

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} - \ldots - \frac{1}{2j}$$

pînă cînd suma începe să fie mai mică decît a. Apoi adăugăm termeni pozitivi nefolosiți:

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \ldots - \frac{1}{2j} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{2k+1}$$

pînă cînd suma începe să fie mai mare decît b. Continuînd acest procedeu adăugăm termeni negativi pînă cînd suma începe să fie mai mică decît a, apoi termeni pozitivi pînă cînd suma începe să fie mai mare decît b; apoi termeni negativi etc., *ad infinitum*. Dat fiind că valoarea absolută $1/n$ a termenului general $(-1)^{n+1}/n$ tinde către zero, rezultă că sumele par-

Scanned with OKEN Scanner

țiale s_n al seriei rearanjate se apropie oricît de mult de oricare număr din intervalul închis $[a, b]$. Propoziția nu este adevărată pentru nici un număr din afara intervalului $[a, b]$.

Dacă în procedeul descris mai sus permitem sumelor parțiale să depășească abia pe 1, apoi să devină cu puțin mai mici decît -2, apoi abia să depășească pe 3 și să devină apoi mai mici decît -4 etc., atunci șirul sumelor parțiale ale seriei rearanjate are ca mulțime de puncte limită mulțimea tuturor numerelor reale.

W. Sierpiński (a se vedea [43]) a arătat că dacă Σa_n este o serie semiconvergentă cu suma s și dacă $s' < s$, atunci printr-o rearanjare care permută doar termenii pozitivi (termenii negativi rămîn pe locurile lor) se obține o serie cu suma s'. O observație asemănătoare se face pentru numerele $s'' > s$ și rearanjări doar ale termenilor negativi. Aceasta reprezintă evident o generalizare a celebrei „teoreme a lui Riemann de rearanjare" (vezi [36], p. 232, Teorema III), ilustrată în ceea ce are esențial prin discuția din acest exemplu.

Există și o generalizare în altă direcție, care afirmă că: Dacă Σa_n este o serie semiconvergentă de numere *complexe*, atunci sumele obținute prin toate rearanjările posibile, atît convergente cît și divergente la ∞, formează sau o dreaptă în planul complex (care conține și punctul de la infinit) sau acoperă *întreg* planul complex (inclusiv punctul de la infinit). Mai mult, dacă Σv_n este o serie semiconvergentă de *vectori* într-un spațiu finit dimensional, atunci sumele obținute prin toate rearanjările posibile formează o varietate liniară în spațiu (vezi [47]).

6. Pentru o serie arbitrară Σa_n, semiconvergentă, și pentru un număr real arbitrar x, un șir $\{\varepsilon_n\}$, unde $|\varepsilon_n| = 1$ pentru $n = 1, 2, \ldots$, astfel ca $\Sigma \varepsilon_n a_n = x$.

Procedeul este similar celui utilizat în Exemplul 5. Deoarece $\Sigma |a_n| = +\infty$, putem înmulți cu factori ε_n, cu valoarea absolută 1, în așa fel încît $\varepsilon_1 a_1 + \ldots + \varepsilon_n a_n = |a_1| + \ldots + |a_n| > x$. Fie n_1 cea mai mică valoare a lui n pentru care

Scanned with OKEN Scanner

inegalitatea este îndeplinită. Putem găsi factorii ε_n, egali cu 1 în valoare absolută, astfel încît

$$\varepsilon_1 a_1 + \ldots + \varepsilon_{n_2} a_{n_2} = |a_1| + \ldots + |a_{n_1}| - |a_{n_1+1}| - \ldots - |a_{n_2}| < x,$$

cu cea mai mică valoare posibilă pentru n_2.

Dacă acest procedeu se repetă, cu sume parţiale care sînt alternativ mai mari decît x şi mai mici decît x, se obţine o serie $\Sigma\varepsilon_n a_n$ care converge către x, deoarece $a_n \to 0$ cînd $n \to +\infty$.

7. Serii divergente care satisfac oricare pereche de condiţii din grupul de trei condiţii ale teoremei seriilor alternate.

Teorema seriilor alternate la care ne referim afirmă că seria $\Sigma\varepsilon_n c_n$, unde $|\varepsilon_n| = 1$ şi $c_n > 0$, $n = 1, 2, \ldots$, este convergentă cu condiţia ca

(*i*) $\varepsilon_n = (-1)^{n+1}$. $n = 1, 2, \ldots$,

(*ii*) $c_{n+1} \leqslant c_n$, $n = 1, 2, \ldots$,

(*iii*) $\lim_{n \to +\infty} c_n = 0$.

Oricare două din aceste condiţii luate împreună nu implică convergenţa; aceasta înseamnă că nici una nu poate fi omisă. Următoarele trei exemple demonstrează acest fapt.

(*i*) Fie $\varepsilon_n = 1, c_n = 1/n$, $n = 1, 2, \ldots$. Sau, într-un exemplu care reprezintă o variantă de serie alternată, fie $\{\varepsilon_n\}$ şirul care se repetă în tripleţi $1, 1, -1, 1, 1, -1, \ldots$.

(*ii*) Fie $c_n = 1/n$, dacă n este impar şi fie $c_n = 1/n^2$, dacă n este par.

(*iii*) Fie $c_n = (n+1)/n$ (sau, mai simplu, fie $c_n = 1$), $n = 1, 2, \ldots$.

8. O serie divergentă al cărei termen general tinde către zero și care, cu o introducere adecvată de paranteze, converge către o sumă arbitrară.

Introducerea parantezelor într-o serie infinită înseamnă gruparea unor șiruri finite, consecutive, de termeni (orice asemenea șir finit conține cel puțin un termen) pentru a obține o nouă serie, pentru care șirul sumelor parțiale este un subșir al șirului sumelor parțiale ale seriei inițiale. De exemplu, unul din modurile posibile de introducere a parantezelor în seria armonică alternată duce la seria

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+$$
$$+\frac{1}{(2n-1)\cdot 2n}+\ldots.$$

Orice serie obținută prin introducerea parantezelor într-o serie convergentă este și ea convergentă, și suma ei este egală cu suma seriei inițiale.

Seria rearanjată finală din Exemplul 5 are proprietatea menționată, deoarece pentru orice număr real, o introducere adecvată a parantezelor duce la o serie convergentă a cărei sumă este numărul dat.

9. Pentru un șir pozitiv dat $\{b_n\}$ a cărui limită inferioară este zero, o serie pozitivă divergentă Σa_n al cărei termen general tinde către zero, astfel încît $\underline{\lim}_{n\to+\infty} a_n/b_n = 0$.

Să alegem un subșir $b_{n_1}, b_{n_2}, \ldots, b_{n_k}, \ldots$ de termeni neconsecutivi ai lui $\{b_n\}$, astfel încît $\lim_{k\to+\infty} b_{n_k} = 0$ și fie $a_{n_k} = b_{n_k}^2$ pentru $k = 1, 2, \ldots$. Pentru orice *altă* valoare a lui n: $n = m_1, m_2, m_3, \ldots, m_j, \ldots$ fie $a_{m_j} = 1/j$. Atunci $a_n \to 0$ cînd $n \to +\infty$, Σa_n este divergentă iar $a_{n_k}/b_{n_k} = b_{n_k} \to 0$ cînd $k \to +\infty$.

Acest exemplu demonstrează, în particular, că, indiferent cît de rapid converge către zero un șir pozitiv $\{b_n\}$, există un șir pozitiv $\{a_n\}$ care converge spre zero suficient de lent pentru ca seria Σa_n să fie divergentă și totuși să conțină un subșir care să conveargă spre zero mai rapid decît subșirul corespunzător din $\{b_n\}$.

Scanned with OKEN Scanner

10. Pentru un șir pozitiv dat $\{b_n\}$, cu limita inferioară zero, o serie pozitivă convergentă Σa_n cu proprietatea că $\varliminf_{n\to+\infty} a_n/b_n = +\infty$.

Să alegem un subșir $b_{n_1}, b_{n_2}, \ldots, b_{n_k}, \ldots$ al lui $\{b_n\}$ astfel ca pentru orice întreg pozitiv k, $b_{n_k} < k^{-3}$ și fie $a_{n_k} = k^{-2}$ pentru $k = 1, 2, \ldots$. Pentru orice altă valoare a lui n, fie $a_n = n^{-2}$. Atunci

$$\Sigma a_n < +\infty, \text{ în timp ce } a_{n_k}/b_{n_k} = k \to +\infty.$$

Acest exemplu arată, în particular, că indiferent cît de încet converge un șir pozitiv $\{b_n\}$ către zero, există un șir $\{a_n\}$ de numere pozitive, care converge suficient de repede spre zero pentru a asigura convergența seriei Σa_n și să conțină totuși un subșir care converge la zero mai încet decît șirul corespunzător din $\{b_n\}$.

11. Pentru un șir pozitiv $\{c_n\}$ a cărui limită inferioară este zero, o serie pozitivă convergentă Σa_n și o serie pozitivă divergentă Σb_n, astfel ca $a_n/b_n = c_n$, $n = 1, 2, \ldots$.

Să alegem un subșir $c_{n_1}, c_{n_2}, \ldots, c_{n_k}, \ldots$ al lui $\{c_n\}$, astfel încît pentru orice întreg pozitiv k, $c_{n_k} < k^{-2}$ și fie $a_{n_k} = c_{n_k}$, $b_{n_k} = 1$ pentru $k = 1, 2, \ldots$. Pentru orice altă valoare a lui n, fie $a_n = n^{-2}$, $b_n = (n^2 c_n)^{-1}$. Atunci Σa_n converge, Σd_n diverge deoarece $b_n \not\to 0$ cînd $n \to +\infty$, iar $a_n/b_n = c_n$ pentru $n = 1, 2, \ldots$.

Acest exemplu demonstrează (în particular) că oricît de încet ar converge către zero un șir pozitiv $\{c_n\}$, există două serii pozitive, una convergentă și alta divergentă, pentru care raportul termenilor de ordinul n este c_n.

12. O funcție pozitivă și continuă pentru $x \geqslant 1$ cu proprietatea că $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ este convergentă, iar $\sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$ este divergentă.

Exemplul 12, Capitolul 4.

13. O funcție pozitivă și continuă pentru $x \geqslant 1$ cu proprietatea că $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ este divergentă, iar $\sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$ este convergentă.

Pentru orice $n > 1$ fie $g(n) = 0$, și să definim pe g pe intervalele închise $[n - n^{-1}, n]$ și $[n, n + n^{-1}]$ ca fiind liniară și egală cu 1 în capetele $n - n^{-1}$ și $n + n^{-1}$ ale intervalelor. În sfîrșit, definim pe $g(x)$ egală cu 1 pentru $x \geqslant 1$ în acele puncte în care nu fusese încă definită. Atunci funcția

$$f(x) = g(x) + \frac{1}{x^2}$$

este pozitivă și continuă pentru $x \geqslant 1$, $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx = +\infty$, iar $\sum_{n=1}^{+\infty} f(n) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-2} < +\infty$.

14. Serii pentru care criteriul raportului nu este eficient.

Pentru o serie pozitivă $\sum a_n$ criteriul raportului afirmă că (vezi [34], p.390), dacă limita

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho$$

există în sensul finit sau infinit ($0 \leqslant \rho \leqslant +\infty$), atunci

(*i*) dacă $0 \leqslant \rho < 1$, $\sum a_n$ este convergentă;

(*ii*) dacă $1 < \rho \leqslant +\infty$, $\sum a_n$ este divergentă.

Afirmația că, dacă $\rho = 1$, criteriul eșuează are o semnificație mai bogată. Înseamnă că există atît serii divergente cît și serii convergente pozitive și pentru fiecare din ele $\rho = 1$. Ca exemple:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \text{ și respectiv } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Criteriul cîtului poate să nu dea rezultat și în cazul cînd nu există limita ρ. Exemple de serii convergente și respectiv divergente pozitive:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 2^{(-1)^n - n} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^5} + \ldots,$$

unde

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 2 \text{ și } \underline{\lim_{n\to+\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{8},$$

și

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 2^{n-(-1)^n} = 2^2 + 2^1 + 2^4 + 2^3 + 2^6 + 2^5 + \ldots,$$

unde

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 8 \text{ și } \underline{\lim_{n\to+\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2}.$$

O formulare perfecționată a criteriului afirmă că dacă

(*iii*) $\overline{\lim_{n\to+\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, Σa_n este convergentă;

(*iv*) $\underline{\lim_{n\to+\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, Σa_n este divergentă.

Această formulare a criteriului cîtului poate să nu ducă la rezultat datorită inegalităților

$$\underline{\lim_{n\to+\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant 1 \leqslant \overline{\lim_{n\to+\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Mai sus pot fi găsite exemple pentru care se realizează atît egalitățile cît și inegalitățile stricte.

Scanned with OKEN Scanner

15. Serii pentru care criteriul radicalului nu este eficient. Cea mai simplă formulare a criteriului radicalului pentru o serie Σa_n cu termeni nenegativi afirmă (a se vedea [34], p.392) că dacă

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \sigma,$$

există în sensul finit sau infinit ($0 \leqslant \sigma \leqslant +\infty$), atunci

(*i*) dacă $0 \leqslant \sigma < 1$, Σa_n este convergentă;

(*ii*) dacă $1 < \sigma \leqslant +\infty$, Σa_n este divergentă.

Criteriul cîtului și criteriul radicalului sînt legate prin faptul că dacă $\lim_{n\to+\infty} (a_{n+1}/a_n)$ există în sens finit sau infinit, atunci $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n}$ există și este egală cu ea (a se vedea [34], p. 394, Ex.31).

În consecință, dacă criteriul cîtului în forma (*i*) sau (*ii*), Exemplul 14, este aplicabil, atunci și criteriul radicalului este aplicabil. Mai departe, primele două exemple care ilustrează inaplicabilitatea criteriului cîtului (Exemplul 14) exemplifică și eșecul criteriului radicalului (din același motiv). Ultimele două exemple de inaplicabilitate a criteriului cîtului ilustrează și posibilitatea de succes a criteriului radicalului (a se vedea Exemplul 16).

Criteriul radicalului, menționat mai sus, este inaplicabil pentru seria convergentă

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{5+(-1)^n}{2}\right)^{-n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{3^6} + \dots$$

deoarece $\overline{\lim}_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{2}$ și $\underline{\lim}_{n\to+\infty} a_n = \frac{1}{3}$. Nu este aplicabil nici în cazul seriei divergente

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{5+(-1)^n}{2}\right)^{n},$$

deoarece $\overline{\lim}_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = 3$ și $\underline{\lim}_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = 2$.

Scanned with OKEN Scanner

O formulare rafinată a criteriului radicalului afirmă că dacă

(*iii*) $\overline{\lim}_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$, Σa_n este convergentă;

(*iv*) $\overline{\lim}_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$, Σa_n este divergentă.

Această formă a criteriului radicalului este cel puțin tot atît de puternică (în realitate mai puternică, a se vedea Exemplul 16) ca și forma rafinată a criteriului cîtului (Exemplul 14), deoarece (vezi [34], p. 394, Ex. 31):

$$\underline{\lim}_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \underline{\lim}_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} \leqslant \overline{\lim}_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} \leqslant \overline{\lim}_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Forma rafinată a criteriului radicalului stabilește convergența și divergența pentru cele două exemple precedente, deoarece $\overline{\lim}_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n}$ este egal cu $\frac{1}{2}$ și respectiv 3, pentru aceste două serii.

Forma rafinată a criteriului rădăcinii este ineficientă doar în cazul egalității $\overline{\lim}_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$. Am prezentat deja exemple pentru acest caz.

16. Serii pentru care criteriul radicalului este eficient, dar cel al raportului nu este.

Seria convergentă $\sum_{n=1}^{+\infty} 2^{(-1)^n - n}$, pentru care criteriul raportului nu dă rezultat (Exemplul 14) este o serie pentru care criteriul radicalului dă rezultat. Într-adevăr,

$$\sqrt[n]{a_n} = 2^{\frac{(-1)^n - n}{n}} \to 2^{-1} = \frac{1}{2} < 1.$$

Scanned with OKEN Scanner

În mod analog, pentru seria divergentă $\sum_{n=0}^{+\infty} 2^{n-(-1)^n}$ din Exemplul 14, avem

$$\sqrt[n]{a_n} = 2^{\frac{n-(-1)^n}{n}} \to 2^1 = 2 > 1.$$

17. Două serii convergente pentru care produsul Cauchy este divergent.

Produsul Cauchy a două serii $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ și $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ este definit ca fiind seria $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n$, unde

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0.$$

Teorema lui Mertens (vezi [36], p.239, Ex.20) afirmă că dacă Σa_n converge către A, dacă Σb_n converge către B și dacă cel puțin *una* din aceste convergențe este *absolută*, atunci seria produs Σc_n converge către AB.

Fie Σa_n și Σb_n seriile identice

$$a_n = b_n = (-1)^n (n+1)^{-1/2}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Atunci Σa_n și Σb_n converg, conform criteriului seriilor alternate (Exemplul 7), în timp ce Σc_n este divergentă, deoarece

$$|c_n| = \frac{1}{\sqrt{1}\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{n-1}} + \ldots +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{n+1}\sqrt{1}} \geqslant \frac{2}{n+2} + \frac{2}{n+2} + \frac{2}{n+2} + \ldots +$$

$$+ \frac{2}{n+2} = \frac{2(n+1)}{n+2} \geqslant 1, \; n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Scanned with OKEN Scanner

prima inegalitate fiind valabilă deoarece pe intervalul închis $[0, n]$ funcția $\sqrt{(1+x)(n+1-x)}$ este maximă cînd $x = \frac{1}{2}n$.

18. Două serii divergente pentru care produsul Cauchy este serie absolut convergentă.

Produsul Cauchy al seriilor

$$2 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^n + \ldots, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

$$-1 + 1 + 1 + 1 + \ldots + 1^n + \ldots, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

este seria

$$-2 + 0 + 0 + 0 + \ldots + 0^n + \ldots, \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

Mai general, dacă $a_n = a^n$ și $b_n = b^n$ pentru $n \geqslant 1$, și dacă $a \neq b$, termenul c_n al seriei produs al lui Σa_n cu Σb_n pentru $n \geqslant 1$ este:

$$c_n = a_0 b^n + b_0 a^n + a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + a^{n-3}b^3 + \ldots + ab^{n-1} =$$

$$= a_0 b^n + b_0 a^n - a^n - b^n + (a^{n+1} - b^{n+1})/(a-b) =$$

$$= \{a^n[a + (b_0 - 1)(a-b)] - b^n[b + (1-a_0)(a-b)]\}/$$

$$/(a-b),$$

și, de aceea, $c_n = 0$ cînd $a = (1-b_0)(a-b)$ și $b = (a_0 - 1) \times$ $\times (a-b)$. Dacă a și b sînt alese în așa fel încît $a - b = 1$, atunci a_0 și b_0 sînt dați de $a_0 = b + 1 = a$ și $b_0 = 1 - a = -b$.

19. Pentru un șir dat $\left\{\sum_{m=1}^{+\infty} a_{mn}\right\}$, $n = 1, 2, \ldots$, de serii pozitive convergente, o serie pozitivă convergentă $\sum_{m=1}^{+\infty} a_m$, care nu se compară favorabil cu nici una din seriile $\left\{\sum_{m=1}^{+\infty} a_{mn}\right\}$.

Afirmînd că seria $\sum_{m=1}^{+\infty} a_{mn}$ se **compară favorabil** cu seria $\sum_{m=1}^{+\infty} a_{mn}$ pentru un întreg pozitiv dat n, se înţelege

$$\exists M \in \boldsymbol{N} \ni m > M \Rightarrow a_m \leqslant a_{mn};$$

de aceea, dacă se afirmă că o asemenea comparaţie *nu* se face, se înţelege că

$$\forall M \in \boldsymbol{N} \exists m > M \ni a_m > a_{mn}.$$

Pentru toţi întregii pozitivi M şi n să definim *numerele pozitive* S_n, S_{Mn} şi R_{Mn}:

$$S_n = \sum_{m=1}^{+\infty} a_{mn}, \quad S_{Mn} = \sum_{m=1}^{M} a_{mn}, \quad R_{Mn} = \sum_{m=M+1}^{+\infty} a_{mn},$$

şi pentru orice $n \in \boldsymbol{N}$ să alegem pe $M(n)$ în aşa fel încît $1 \leqslant M(1) < M(2) < \ldots$ şi

$$R_{M(1),1} < 2^{-1},$$
$$\max (R_{M(2),1}, R_{M(2),2}) < 2^{-2},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\max (R_{M(n),1}, \ldots, R_{M(n),n}) < 2^{-n}.$$

Pentru orice întreg pozitiv m, să definim pe a_m după cum urmează:

$$a_m = \begin{cases} 2a_{m1}, \text{ dacă } 1 \leqslant m \leqslant M(2), \\ (k+1) \max (a_{m1}, a_{m2}, \ldots, a_{mk}), \\ \quad \text{dacă } M(k) < m \leqslant M(k+1) \text{ pentru } k > 1. \end{cases}$$

Pentru a demonstra că Σa_m este convergentă, să stabilim întîi o inegalitate pentru suma (finită) termenilor seriei pentru care $M(k) < m \leqslant M(k+1)$, cu $k > 1$:

$$\sum_{m=M(k)+1}^{M(k+1)} a_m \leqslant \sum_{m=M(k)+1}^{M(k+1)} \left[(k+1) \sum_{n=1}^{k} a_{mn} \right] =$$

$$= (k+1) \sum_{n=1}^{k} \left[\sum_{m=M(k)+1}^{M(k+1)} a_{mn} \right] \leqslant (k+1) \sum_{n=1}^{k} R_{M(k),n} \leqslant$$

$$\leqslant (k+1) \sum_{n=1}^{k} 2^{-k} < (k+1)^2 2^{-k}.$$

Scanned with OKEN Scanner

De aceea, avem

$$\sum_{m=1}^{+\infty} a_m = \sum_{m=1}^{M(2)} a_m + \sum_{m=M(2)+1}^{M(3)} a_m + \ldots \leqslant 2 \sum_{m=1}^{M(2)} a_{m1} +$$

$$+ \sum_{k=2}^{+\infty} \sum_{m=M(k)+1}^{M(k+1)} a_m < 2S_{M(2),1} + \sum_{k=2}^{+\infty} (k+1)^2 \, 2^{-k} < +\infty.$$

Pe de altă parte, pentru orice n fixat, ori de cîte ori $k \geqslant n$ și $m > M(k)$, $a_n/a_m \geqslant k+1$, deci $\lim_{m \to +\infty} a_m/a_{mn} = +\infty$. De aceea, seria $\sum_{m=1}^{+\infty} a_m$ nu se compară favorabil cu seria $\sum_{m=1}^{+\infty} a_{mn}$. În realitate seria $\sum_{m=1}^{+\infty} a_m$ nu se compară favorabil cu seria $\sum_{m=1}^{+\infty} a_{mn}$, chiar cînd această comparabilitate favorabilă este definită astfel:

$$\exists M \text{ și } K \in \boldsymbol{N} \ni m > M \Rightarrow a_m \leqslant K a_{mn},$$

sau, echivalent, atunci cînd prin inexistența comparării favorabile înțelegem că

$$\forall M \text{ și } K \in \boldsymbol{N} \exists m > M \ni a_m > K a_{mn}.$$

Un șir de serii convergente pozitive se numește **un șir universal de comparare** atunci și numai atunci cînd are proprietatea că o serie pozitivă dată este convergentă *dacă și numai dacă* se compară favorabil cu cel puțin o serie din șirul universal de comparare. Adică, un șir de serii pozitive convergente este un șir universal de comparare atunci și numai atunci cînd convergența sau divergența oricărei serii pozitive poate fi determinată prin comparația cu una din seriile din șir.

Exemplul 19 demonstrează că *nu există un asemenea șir universal de comparare.*

Scanned with OKEN Scanner

20. O matrice Toeplitz T și un șir divergent transformat de T într-un șir convergent.

O **matrice infinită** este o funcție cu valori reale sau complexe definită pe $\boldsymbol{N}\times\boldsymbol{N}$, notată cu $T=(t_{ij})$, unde i și $j\in\boldsymbol{N}$. Dacă seria infinită $\sum_{j=1}^{+\infty} t_{ij}a_j$, unde $\{a_j\}$ este un șir dat de numere, converge pentru orice $i\in\boldsymbol{N}$, șirul $\{b_i\}$, definit de

$$b_i=\sum_{j=1}^{+\infty} t_{ij}a_j,$$

se numește **transformatul** lui $\{a_j\}$ prin T. O matrice infinită $T=(t_{ij})$ se numește **matrice Toeplitz** *), dacă și numai dacă pentru orice șir convergent $\{a_j\}$ șirul $\{b_i\}$ este definit, limita $\lim b_j$ există și este egală cu $\lim_{j\to+\infty} a_j$. Este fundamental în teoria matricelor Toeplitz faptul că următoarele trei proprietăți formează un sistem necesar și suficient de condiții pentru ca o matrice infinită $T=(t_{ij})$ să fie o matrice Toeplitz (pentru demonstrație a se vedea [49]):

$$(1)\qquad \exists M\in\boldsymbol{R}\ni\forall i\in\boldsymbol{N},\ \sum_{j=1}^{+\infty}|t_{ij}|\leqslant M,$$

$$(2)\qquad \lim_{i\to+\infty}\sum_{j=1}^{+\infty} t_{ij}=1,$$

$$(3)\qquad \forall j\in\boldsymbol{N},\ \lim_{i\to+\infty} t_{ij}=0.$$

Fie T matricea Toeplitz (t_{ij}), unde $t_{ij}=1/i$, dacă $1\leqslant j\leqslant i$ și $t_{ij}=0$, dacă $i<j$:

$$T=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \dots \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

*) După numele matematicianului german Otto Toeplitz (1881—1940).

Scanned with OKEN Scanner

Șirul $\{a_j\} = 1, -1, 1, -1, \ldots, (-1)^{n+1}, \ldots$ nu este convergent, dar transformatul său prin T

$$\{b_i\} = 1, 0, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{5}, \ldots, \frac{1 + (-1)^{i+1}}{2i}, \ldots,$$

converge către 0.

Mai general, dacă $\{a_n\}$ este un șir divergent *oarecare*, fiecare termen al său fiind sau 1 sau -1, atunci există o matrice Toeplitz T care transformă pe $\{a_n\}$ într-un șir convergent. De fapt, T poate fi definit astfel ca $\{a_n\}$ să fie transformat în șirul cu toți termenii nuli. Această matrice $T = (t_{ij})$ poate fi definită după cum urmează: Fie $\{n_i\}$ un șir strict crescător de întregi pozitivi, astfel încît a_{n_i} și a_{n_i+1} să aibă semne opuse pentru $i = 1, 2, \ldots$. Fie

$$t_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{2}, \text{ dacă } j = n_i \text{ sau } j = n_i + 1, \\ 0, \text{ în celelalte cazuri.} \end{cases}$$

Atunci T este o matrice Toeplitz care transformă pe $\{a_n\}$ în $0, 0, \ldots$.

21. Pentru o matrice Toeplitz $T = (t_{ij})$, dată, există un șir $\{a_j\}$, $a_j = \pm 1$ pentru orice j, astfel încît șirul transformat $\{b_i\}$ al lui $\{a_j\}$ prin T este divergent.

Referindu-ne la condițiile (1) — (3) din Exemplul 20, alegem două șiruri $i_1 < i_2 < \ldots, j_1 < j_2 < j_3 < \ldots$ după cum urmează. Fie i_1 astfel încît, conform (2), dacă $i \geqslant i_1$, să avem

$$\sum_{j=1}^{+\infty} t_{ij} = 1 + e_{1i}, \quad |e_{1i}| < 0{,}05.$$

Scanned with OKEN Scanner

Apoi, fie j_1 astfel încît, conform (1) și (2),

$$\sum_{j=1}^{j_1} t_{i_1 j} = 1 + d_1 \text{ și } \sum_{j=j_1+1}^{+\infty} |t_{i_1 j}| < 0{,}05,$$

unde $|d_1| < 0{,}1$.

După aceasta, alegem $i_2 > i_1$, astfel încît pentru $i \geqslant i_2$, conform (2) și (3), să avem

$$\sum_{j=1}^{j_1} |t_{ij}| < 0{,}05 \text{ și } \sum_{j=1}^{+\infty} t_{ij} = 1 + e_{2i},\ |e_{2i}| < (0{,}05)^2.$$

Apoi, alegem $j_2 > j_1$ astfel încît, conform (1) și (2),

$$\sum_{j=1}^{j_2} t_{i_2 j} = 1 + d_2 \text{ și } \sum_{j=j_2+1}^{+\infty} |t_{i_2 j}| < (0{,}05)^2,$$

unde $|d_2| < 2 \cdot (0{,}05)^2$.

Numerele $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$ și $j_1 < j_2 < \ldots < j_k$ fiind deja alese, alegem $i_{k+1} > i_k$ astfel încît, conform (2) și (3), pentru $i \geqslant i_{k+1}$, să avem

$$\sum_{j=1}^{j_k} |t_{ij}| < (0{,}05)^k \text{ și } \sum_{j=1}^{+\infty} t_{ij} = 1 + e_{k+1,i},\ |e_{k+1,i}| < (0{,}05)^{k+1}.$$

Apoi, alegem $j_{k+1} > j_k$ astfel încît, conform (1) și (2), să avem

$$\sum_{j=1}^{j_{k+1}} t_{i_{k+1} j} = 1 + d_{k+1} \text{ și } \sum_{j=j_{k+1}+1}^{+\infty} |t_{i_{k+1} j}| < (0{,}05)^{k+1},$$

unde $|d_{k+1}| < 2 \cdot (0{,}05)^{k+1}$.

Definim șirul $\{a_j\}$:

$$a_j = \begin{cases} 1 \text{ pentru } 1 \leqslant j \leqslant j_1, & j_2 < j \leqslant j_3, \ldots, \\ -1 \text{ pentru } j_1 < j \leqslant j_2, & j_3 < j \leqslant j_4, \ldots . \end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

Dacă k este impar și $k > 1$, atunci

$$b_{i_k} = \sum_{j=1}^{j_1} t_{ikj} - \sum_{j=j_1+1}^{j_2} t_{ikj} + \sum_{j=j_2+1}^{j_3} t_{ikj} - \ldots +$$

$$+ \sum_{j=j_{k-1}+1}^{j_k} t_{ikj} + \sum_{j=j_k+1}^{\infty} t_{ikj} a_j = \sum_{j=1}^{j_1} t_{ikj} - \left(\sum_{j=1}^{j_2} t_{ikj} - \right.$$

$$\left. - \sum_{j=1}^{j_1} t_{ikj}\right) + \left(\sum_{j=1}^{j_3} t_{ikj} - \sum_{j=1}^{j_2} t_{ikj}\right) - \ldots + \left(\sum_{j=1}^{j_h} t_{ikj} - \right.$$

$$\left. - \sum_{j=1}^{j_{k-1}} t_{ikj}\right) + \sum_{j=j_k+1}^{+\infty} t_{ikj} a_j.$$

Cu excepția lui $\sum_{j=1}^{j_k} t_{ikj} = 1 + d_k$, toate mărimile $\sum_{j=1}^{j_r} t_{ikj}$ sînt în valoare absolută mai mici decît $(0{,}05)^{k-1}$. Deoarece

$$\left| \sum_{j=j_k+1}^{+\infty} t_{ikj} a_j \right| \leqslant \sum_{j=j_k+1}^{+\infty} |t_{ikj}| < (0{,}05)^k,$$

obținem

$$b_{i_k} > 1 - 2 \cdot (0{,}05)^{k-1} - 2(k-1)\,(0{,}05)^{k-1} - (0{,}05)^k =$$

$$= 1 - [2(k-1) + 2{,}05]\,(0{,}05)^{k-1}$$

Metode de analiză arată că funcția de k definită în rîndul de deasupra este o funcție crescătoare pentru $k \geqslant 1$ și, de aceea, ia valoarea minimă, pentru $k \geqslant 3$, în punctul în care $k = 3$. De aceea, dacă k este un întreg impar mai mare decît 1, avem

$$b_{i_k} > 1 - [4 + 2{,}05]\,(0{,}05)^2 > 0{,}9.$$

Scanned with OKEN Scanner

Analog, pentru k par, se poate arăta că $b_{i_k} < -0{,}7$. De aceea, șirul $\{b_i\}$ este divergent.

Exemplele 20 și 21 arată că deși *unele* matrice Toeplitz transformă *anumite* șiruri ai căror termeni sînt ± 1 în șiruri convergente, *nici o* matrice Toeplitz nu transformă *toate* șirurile de acest fel în șiruri convergente.

Un rafinament al procedeului precedent ne permite să conchidem că: *dacă* $\{T_m\}$ *este un șir de matrice Toeplitz, există un șir* $\{a_n\}$ *cu proprietatea că* $|a_n| = 1$ *pentru* $n = 1, 2, \ldots$ *și că pentru orice* m *transformatul lui* $\{a_n\}$ *prin* T_m *este divergent.* Într-adevăr, în contextul demonstrației precedente, fie $\{i_k\}$ și $\{j_k\}$ șiruri strict crescătoare de întregi pozitivi, alese în așa fel încît să aibă loc proprietățile respective în sensul următor: alegem în așa fel pe i_1 și j_1, încît să aibă loc proprietățile respective în raport cu matricea T_1; apoi alegem pe i_2 și j_2 astfel încît să aibă loc proprietățile respective în raport cu T_1 și T_2 ș.a.m.d. Fie $\{a_n\}$ șirul definit ca în Exemplul 21. Pentru orice m fixat, șirul $\{a_n\}$ este transformat într-un șir $\{b_{mn}\}$; deoarece pentru $k > m$, numerele i_k și j_k formează șiruri adaptate tehnicii de găsire a contraexemplului pentru T_m, rezultă că $\lim_{n \to +\infty} b_{mn}$ nu există, oricare ar fi m.

22. O serie de puteri convergentă într-un singur punct. (Vezi Exemplul 24.)

Seria $\sum_{n=0}^{+\infty} n!x^n$ converge pentru $x = 0$ și diverge pentru $x \neq 0$.

23. O funcție a cărei serie MacLaurin converge peste tot, dar care reprezintă funcția într-un singur punct.

Funcția

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & \text{pentru } x \neq 0, \\ 0, & \text{pentru } x = 0 \end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

este indefinit derivabilă, toate derivatele ei pentru $x = 0$ fiind egale cu 0 (a se vedea Capitolul 3, Exemplul 10). De aceea, seria ei MacLaurin

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} 0$$

converge pentru orice x către funcția identic nulă, și deci reprezintă (converge către) funcția dată, f, într-un singur punct, $x = 0$.

24. O funcție a cărei serie MacLaurin converge într-un singur punct.

O funcție cu aceste proprietăți este descrisă în [10], p.153. Funcția

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n} \cos n^2 x,$$

datorită factorilor e^{-n} prezenți în toate seriile obținute prin derivarea termen cu termen (serii care deci converg uniform), este o funcție indefinit derivabilă. Seria ei MacLaurin are numai termeni de grad par și valoarea absolută a termenului de grad $2k$ este

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2k} e^{-n} n^{4k}}{(2k)!} > \left(\frac{n^2 x}{2k}\right)^{2k} e^{-n},$$

pentru orice $n = 0, 1, 2, \ldots$ și, în particular, pentru $n = 2k$. Pentru această valoare a lui n și, în funcție de orice x nenul dat, cu k orice întreg mai mare decît $e/2x$, avem

$$\left(\frac{n^2 x}{2k}\right)^{2k} e^{-n} = \left(\frac{2kx}{e}\right)^{2k} > 1.$$

Aceasta înseamnă că pentru orice x nenul, seria MacLaurin pentru f diverge.

Scanned with OKEN Scanner

În Exemplul 22 s-a arătat că seria $\sum_{n=0}^{+\infty} n!x^n$ este convergentă numai în punctul $x = 0$. Este firesc să ne întrebăm dacă această serie este seria MacLaurin a unei funcții $f(x)$, deoarece un răspuns afirmativ ar furniza încă un exemplu de funcție descrisă la acest punct. Vom demonstra acum că este într-adevăr posibil să construim o funcție $f(x)$, indefinit derivabilă, a cărei serie MacLaurin să coincidă cu seria amintită. În acest scop, fie $\varphi_{n0}(x)$ definită după cum urmează. Pentru $n = 1, 2, \ldots$, fie

$$\varphi_{n0}(x) = \begin{cases} ((n-1)!)^2, & \text{dacă } 0 \leqslant |x| \leqslant 2^{-n}/(n!)^2, \\ 0, & \text{dacă } |x| \geqslant 2^{-n+1}/(n!)^2, \end{cases}$$

și, cu ajutorul „funcțiilor de legătură" construite pentru Exemplul 12 din Capitolul 3, $\varphi_{n0}(x)$ poate fi făcută indefinit derivabilă peste tot. Fie $f_1(x) = \varphi_{10}(x)$; pentru $n = 2, 3, \ldots$ fie

$$\varphi_{n1}(x) = \int_0^x \varphi_{n0}(t)\,dt,$$

$$\varphi_{n2}(x) = \int_0^x \varphi_{n1}(t)\,dt,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$f_n(x) = \varphi_{n,n-1}(x) = \int_0^x \varphi_{n,n-2}(t)\,dt.$$

Astfel,

$$f_n'(x) = \varphi_{n,n-2}(x),\ f_n''(x) = \varphi_{n,n-3}(x),\ \ldots,\ f_n^{(n-1)}(x) =$$

$$= \varphi_{n0}(x),\ f_n^{(n)}(x) = \varphi_{n0}'(x).$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru orice x și $0 \leqslant k \leqslant n-2$,

$$|f_n^{(k)}(x)| \leqslant (2^{-n+1}/n^2)\,|x|^{n-k-2}/(n-k-2)!,$$

deoarece

$$|\varphi_{n1}(x)| \leqslant 2^{-n+1}/n^2,$$

$$|\varphi_{n2}(x)| \leqslant [2^{-n+1}/n^2] \cdot |x|,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$|\varphi_{n,n-1}(x)| \leqslant (2^{-n+1}/n^2) \cdot |x|^{n-2}/(n-2)!$$

Pentru orice $k = 0, 1, 2, \ldots$, seria $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n^{(k)}(x)$ converge uniform în orice interval închis finit. Într-adevăr, dacă $|x| \leqslant K$, avem

$$\sum_{n=k+2}^{+\infty} |f_n^{(k)}(x)| \leqslant \sum_{n=k+2}^{+\infty} \frac{K^{n-k-2}}{n^2 \cdot 2^{n-1}\,(n-k-2)!},$$

și convergența uniformă rezultă din criteriul lui Weierstrass (a se vedea [34], p.445). Prin urmare, funcția

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$$

este indefinit derivabilă și pentru $k = 0, 1, 2, \ldots$,

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n^{(k)}(x).$$

Pentru $k \geqslant n \geqslant 1$, $f_n^{(k)}(0) = \varphi_{n0}^{(k-n+1)}(0) = 0$. Pentru $n \geqslant 1$ și $k = n-1$, $f_n^{(k)}(0) = \varphi_{n0}(0) = ((n-1)!)^2$. În sfîrșit, pentru $0 \leqslant k < n-1$, avem $f_n^{(k)}(0) = 0$. Astfel, seria MacLaurin pentru $f(x)$ este $\sum_{n=0}^{+\infty} n!x^n$.

Scanned with OKEN Scanner

25. O serie trigonometrică convergentă, care nu este o serie Fourier.

Vom prezenta două exemple, unul pentru cazul integralei Riemann, celălalt pentru cazul integralei Lebesgue.

Seria $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n^\alpha}$ unde $0 < \alpha \leqslant \frac{1}{2}$, este convergentă pentru orice număr real x, după cum se poate constata (a se vedea [34], p.533) prin aplicarea unui criteriu de convergență datorat lui N.H. Abel (matematician norvegian, 1802—1829). Totuși, această serie nu poate fi seria Fourier a unei funcții $f(x)$ integrabile Riemann, deoarece, în conformitate cu inegalitatea lui Bessel (a se vedea [34], p.532) pentru $n = 1, 2, \ldots$ avem

$$\frac{1}{1^{2\alpha}} + \frac{1}{2^{2\alpha}} + \ldots + \frac{1}{n^{2\alpha}} \leqslant \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [f(x)]^2 \, dx.$$

Deoarece $f(x)$ este integrabilă Riemann, aceeași proprietate o are și $[f(x)]^2$. De aici rezultă că membrul drept al inegalității de mai sus este finit, în timp ce dacă $\alpha \leqslant \frac{1}{2}$, membrul stîng este nemărginit cînd $n \to +\infty$. (Contradicție.)

Seria $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\sin nx}{\ln nx}$ este și ea convergentă pentru orice număr real x.

Fie

$$f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\sin nx}{\ln n}.$$

Dacă $f(x)$ este integrabilă Lebesgue, atunci funcția

$$F(x) = \int_0^x f(t) \, dt$$

trebuie să fie periodică și absolut continuă. Deoarece $f(x)$ este o funcție impară de x ($f(x) = -f(-x)$), atunci $F(x)$

Scanned with OKEN Scanner

este o funcție pară ($F(x) = F(-x)$), și astfel seria Fourier a funcției $F(x)$ este de forma

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos nx,$$

unde $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} F(x)\,dx$ și, pentru $n \geqslant 2$,

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} F(x)\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}F(x)\frac{\sin nx}{n}\Big|_0^{\pi} -$$

$$-\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} F'(x)\frac{\sin nx}{n}\,dx = -\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\frac{\sin nx}{n}\,dx = -\frac{1}{n\ln n}.$$

($F'(x)$ există și este egală cu $f(x)$ aproape peste tot). Deoarece $F(x)$ este cu variație mărginită, seria ei Fourier converge în orice punct; în particular, în $x = 0$, de unde deducem că $\sum_{n=2}^{+\infty} a_n$ este convergentă. Deoarece $a_n = -1/(n\ln n)$ și $\sum_{n=2}^{+\infty}(-1/(n\ln n))$ este divergentă, am ajuns în contradicție cu premiza că $f(x)$ este integrabilă Lebesgue.

În sfîrșit, pentru a demonstra că seria trigonometrică $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{\sin nx}{\ln n}$ nu este seria Fourier a nici unei funcții integrabile Lebesgue, avem nevoie de următoarea teoremă (pentru demonstrație a se vedea [52] și [53]): *Dacă o serie trigonometrică este seria Fourier a unei funcții integrabile Lebesgue g, și dacă ea converge aproape peste tot spre o funcție f, atunci $f(x) = g(x)$ aproape peste tot și, deci, f este integrabilă Lebesgue, iar seria trigonometrică dată este seria Fourier a lui f.*

26. O funcție $f(x)$ indefinit derivabilă cu proprietatea

$$\lim_{|x|\to+\infty} f(x) = 0$$

Scanned with OKEN Scanner

și care nu este transformata Fourier a nici unei funcții integrabile Lebesgue.

Fie $\{c_n\}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ un șir dublu infinit, astfel încît

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$$

este convergentă pentru orice x, dar nu reprezintă o funcție integrabilă Lebesgue pe $[-\pi, \pi]$ (a se vedea Exemplul 25). Vom demonstra că dacă $h(x)$ este o funcție oarecare indefinit derivabilă, care se anulează în afara intervalului $\left[-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right]$ dacă $h(0) = 2\pi$ și dacă

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n h(x - n),$$

atunci $f(x)$ este o funcție de tipul dorit.

Deoarece $h(x)$ se anulează în exteriorul lui $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, seria care definește pe $f(x)$ are, pentru orice x fixat, un număr finit de termeni nenuli. Prin urmare, seria este convergentă pentru orice x și reprezintă o anumită funcție $f(x)$. În virtutea aceluiași argument, seria converge uniform în orice interval finit, ca și seria obținută prin derivarea termen cu termen de un număr finit de ori. Mai mult,

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n h^{(k)}(x - n), \quad k = 0, 1, 2, \ldots .$$

Dacă $F(t)$ este integrabilă Lebesgue și satisface condiția

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(t)\, e^{-itx}\, dt = f(x),$$

fie

$$g(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} F(t + 2\pi m).$$

Scanned with OKEN Scanner

Deoarece $F(t)$ este integrabilă Lebesgue, $g(t)$ este definită pentru aproape orice t, $g(t+2\pi)=g(t)$, iar

$$\int_{-\pi}^{\pi}|g(t)|\,dt \leqslant \sum_{m=-\infty}^{+\infty}\int_{-\pi}^{\pi}|F(t+2\pi m)|\,dt =$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}|F(t)|\,dt<+\infty$$

(Referinţe pentru aceste date şi pentru egalitatea următoare se găsesc în [29], pp.130—132, pp. 152—153). Mai departe, avem:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(t)\,e^{-int}dt=\frac{1}{2\pi}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\int_{\pi}^{\pi}F(t+2\pi m)\,e^{-int}dt=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\int_{-\pi}^{\pi}F(t+2\pi m)\,e^{-in(t+2\pi m)}dt=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(t)\,e^{-int}dt=\frac{1}{2\pi}f(n)=\frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}c_k h(n-k)=$$

$$=\frac{c_n}{2\pi}h(0)=c_n.$$

Cu alte cuvinte, c_n sînt coeficienţii Fourier ai funcţiei integrabile Lebesgue $g(t)$. Această contradicţie stabileşte că $F(x)$ nu este transformata Fourier a nici unei funcţii integrabile Lebesgue.

27. Pentru o mulţime numerabilă oarecare $E\subset[-\pi,\pi]$, o funcţie continuă a cărei serie Fourier este divergentă în fiecare punct al lui E şi convergentă în fiecare punct al lui $[-\pi,\pi]\setminus E$.

Ideea care stă la baza acestui exemplu a fost dată de Fejér şi Lebesgue. O expunere a detaliilor poate fi găsită în [52], pp.167—173, unde există şi referinţe la articolele originale.

Scanned with OKEN Scanner

28. O funcţie integrabilă (Lebesgue) pe $[-\pi, \pi]$ a cărei serie Fourier diverge peste tot.

Exemplul acesta se datorează lui A.N. Kolmogorov. Detalii şi referinţe pot fi găsite în [52], pp.175—179.

29. Un şir $\{a_n\}$ de numere raţionale cu proprietatea că pentru orice funcţie f, continuă pe $[0,1]$ şi care se anulează în 0 ($f(0) = 0$), există un şir strict crescător $\{n_\nu\}$ de întregi pozitivi, astfel încît (cu $n_0 = 0$) să avem

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=n_\nu+1}^{n_{\nu+1}} a_n x^n \right),$$

covergenţa fiind uniformă pe $[0,1]$.

Facem o observaţie preliminară:

Oricare ar fi întregul pozitiv m, mulţimea tuturor polinoamelor cu coeficienţi raţionali şi care conţin numai puterile x^n cu $n \geqslant m$, este densă în spaţiul $C_0([0,1])$ al tuturor funcţiilor continue pe $[0,1]$ şi care se anulează în 0, în „topologia uniformă" dată de formula normei şi a distanţei

$$\rho(f, g) = \|f - g\| = \max\{|f(x) - g(x)|,\ 0 \leqslant x \leqslant 1\}.$$

Aceasta rezultă din teorema Stone-Weierstrass (a se vedea [42], p. 288, şi [29], pp. 9—10).

Fie acum $\{f_n\}$ o enumerare a unei mulţimi numerabile şi dense de funcţii din $C_0([0,1])$. De exemplu, $\{f_n\}$ poate fi un şir format din toate polinoamele cu coeficienţi raţionali şi termen constant nul. Fie P_1 unul din polinoame, pentru care $\rho(f_1, P_1) = \|f_1 - P_1\| < 1$. Fie P_2 un polinom pentru care, printre termenii cu coeficient nenul, exponentul cel mai mic este mai mare decît gradul lui P_1 şi pentru care $\rho(f_2 - P_1, P_2) = \|f_2 - (P_1 + P_2)\| < \frac{1}{2}$. Avînd definite polinoamele $P_1, P_2, \ldots, P_n$ în $C_0([0,1])$ cu coeficienţi raţionali şi astfel încît

Scanned with OKEN Scanner

(a) „cel mai mic exponent al lui P_{k+1}“ > gradul lui P_k, $k = 1, 2, \ldots, n-1$,

(b) $\left\| f_k - \sum_{i=1}^{k} P_i \right\| < \frac{1}{k}, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$

să alegem un polinom P_{n+1} în $C_0([0,1])$, cu coeficienți raționali și cu proprietatea că

(a′) „cel mai mic exponent al lui P_{n+1}“ > gradul lui P_n,

(b′) $\left\| f_{n+1} - \sum_{i=1}^{n+1} P_i \right\| < \frac{1}{n+1}.$

Fie m_j = „cel mai mic exponent al lui P_j“, și fie M_j = gradul lui P_j, pentru orice $j \in \boldsymbol{N}$. Atunci $m_j \leqslant M_j < m_{j+1}$, pentru $j \in \boldsymbol{N}$. Definim acum șirul $\{a_n\}$ în modul următor, $a_1 = a_2 = \ldots = a_{m_1-1} = 0$, a_{m_1} = coeficientul lui x^{m_1} în P_1, a_{m_1+1} = coeficientul lui x^{m_1+1} în P_1, ..., a_{M_1} = coeficientul lui x^{M_1} în P_1. În general, pentru $M_j < n < m_{j+1}$, fie $a_n = 0$; pentru $m_{j+1} \leqslant n \leqslant M_{j+1}$, fie a_n = coeficientul lui x^n în P_j. Dacă $f \in C_0([0,1])$, fie $0 < k_1 < k_2 < \ldots$ astfel încît $\|f - f_{k_\mu}\| < 1/\mu$ pentru orice $\mu \in \boldsymbol{N}$. Atunci

$$\left\| f - \sum_{1}^{k_\mu} P_i \right\| \leqslant \|f - f_{k_\mu}\| + \left\| f_{k_\mu} - \sum_{i=1}^{k_\mu} P_i \right\| < \frac{1}{\mu} +$$

$$+ \frac{1}{k_\mu} \leqslant \frac{2}{\mu}.$$

De aici, dacă $n_0 = 0$ și $n_\nu = M_{k_\nu}$ pentru $\nu \in \boldsymbol{N}$, atunci

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=n+1}^{n_\nu+1} a_n x^n \right)$$

unde seria (grupată) din dreapta converge uniform în [0,1].

Acest rezultat surprinzător este datorat lui W. Sierpiński. Trebuie remarcată analogia sa strînsă cu cele indicate în ultimul alineat din Exemplul 5. În acest ultim caz, s-a obținut printr-o rearanjare o singură serie de numere cu

Scanned with OKEN Scanner

proprietatea că, pentru orice număr real x, există un subșir de sume parțiale — deci o metodă de a introduce paranteze în serie — care converge la x. În cazul de față există o singură serie de puteri cu proprietatea că, pentru orice membru al lui $C_0([0, 1])$, există un subșir de sume parțiale — și deci o metodă de introducere a parantezelor în serie — care converge uniform la f.

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul 7

Convergența uniformă

Introducere

În exemplele din acest capitol este vorba despre convergența uniformă — și convergența care *nu* este uniformă — a unor șiruri de funcții definite pe anumite mulțimi. Vom considera cunoscute definițiile și teoremele de bază (vezi [34], pp. 441 — 462, [36], pp. 270 — 292).

1. Un șir de funcții discontinue peste tot care converge uniform către o funcție continuă peste tot.

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{dacă } x \text{ este rațional,} \\ 0, & \text{dacă } x \text{ este irațional.} \end{cases}$$

Evident, $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$ este uniformă pentru $-\infty < x < +\infty$.

Acest exemplu simplu ilustrează următorul principiu general: *Convergența uniformă conservă comportarea bună, nu comportarea proastă*. Același principiu va fi ilustrat de mai multe ori în exemplele care urmează.

2. Un șir de funcții indefinit derivabile care converge uniform către zero și pentru care șirul derivatelor diverge peste tot.

Dacă $f_n(x) = (\sin nx)/\sqrt{n}$, atunci, deoarece $|f_n(x)| \leqslant 1/\sqrt{n}$, șirul $\{f_n(x)\}$ converge uniform către 0. Ca să vedem că

Scanned with OKEN Scanner

Scanned with OKEN Scanner

șirul $\{f_n'(x)\}$ nu converge nicăieri, fie x fixat și să considerăm șirul

$$b_n = f_n'(x) = \sqrt{n} \cos nx.$$

Dacă $x = 0$, $b_n = \sqrt{n} \to +\infty$ cînd $n \to +\infty$. Vom arăta că pentru orice $x \neq 0$, șirul $\{b_n\}$ nu este mărginit și deci este divergent, demonstrînd că există valori oricît de mari ale lui n, pentru care $|\cos nx| \geqslant \frac{1}{2}$. Într-adevăr, pentru orice întreg pozitiv m, pentru care $|\cos mx| < \frac{1}{2}$, avem

$$|\cos 2mx| = |2\cos^2 mx - 1| = 1 - 2\cos^2 mx > \frac{1}{2},$$

astfel încît există un $n > m$ pentru care $|\cos nx| > \frac{1}{2}$.

3. O limită neuniformă și nemărginită de funcții mărginite

Fiecare din funcțiile

$$f_n(x) = \begin{cases} \min\left(n, \frac{1}{x}\right), & \text{dacă } 0 < x \leqslant 1, \\ 0, & \text{dacă } x = 0, \end{cases}$$

este mărginită pe intervalul închis $[0,1]$, dar funcția limită $f(x)$, este egală cu $\frac{1}{x}$, dacă $0 < x \leqslant 1$, și egală cu 0, dacă $x = 0$, nu este mărginită pe acest interval.

De remarcat că pentru ca acest exemplu să existe, limita *nu* poate fi uniformă.

4. O limită neuniformă de funcții continue, care nu este continuă.

Un exemplu banal este furnizat de

$$f_n(x) = \begin{cases} \min(1, nx), & \text{dacă } x \geqslant 0, \\ \max(-1, nx), & \text{dacă } x < 0, \end{cases}$$

a cărui limită este funcția signum (Capitolul 3, Exemplul 3), discontinuă în $x = 0$.

Obținem un exemplu mai interesant folosind funcția f definită astfel (vezi Capitolul 2, Exemplul 15):

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q}, \text{ dacă } x = \frac{p}{q}, \text{ fracție ireductibilă, cu } p \text{ și } q \text{ numere} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{întregi și } q > 0, \\ 0, \text{ dacă } x \text{ este irațional.} \end{cases}$$

Pentru un întreg pozitiv arbitrar n, să definim pe $f_n(x)$ după cum urmează: pentru fiecare punct $\left(\frac{p}{q}, \frac{1}{q}\right)$, unde $1 \leqslant q < n$, $0 \leqslant p \leqslant q$, în fiecare interval de forma $\left(\frac{p}{q} - \frac{1}{2n^2}, \frac{p}{q}\right)$ definim

$$f_n(x) = \min\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{q} + 2n^2\left(x - \frac{p}{q}\right)\right);$$

în fiecare interval de forma $\left(\frac{p}{q}, \frac{p}{q} + \frac{1}{2n^2}\right)$ definim

$$f_n(x) = \max\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{q} - 2n^2\left(x - \frac{p}{q}\right)\right);$$

în fiecare punct x al lui $[0,1]$, în care $f_n(x)$ nu a fost încă definită, fie $f_n(x) = \frac{1}{n}$. În afara lui $[0,1]$, $f_n(x)$ este definit în așa fel încît să fie periodică, cu perioada 1. Atunci graficul lui $f_n(x)$ constă dintr-un arc poligonal infinit format din segmente care sînt sau situate pe orizontala $y = \frac{1}{n}$, sau se ridică cu panta $\pm 2n^2$ în puncte izolate ale graficului lui f (vezi fig. 2). Cînd n crește, acești „colți" se ascut și baza se apropie de axa x. În consecință, pentru orice $x \in \boldsymbol{R}$ și $n = 1, 2, \ldots$, avem

$$f_n(x) \geqslant f_{n+1}(x),$$

Scanned with OKEN Scanner

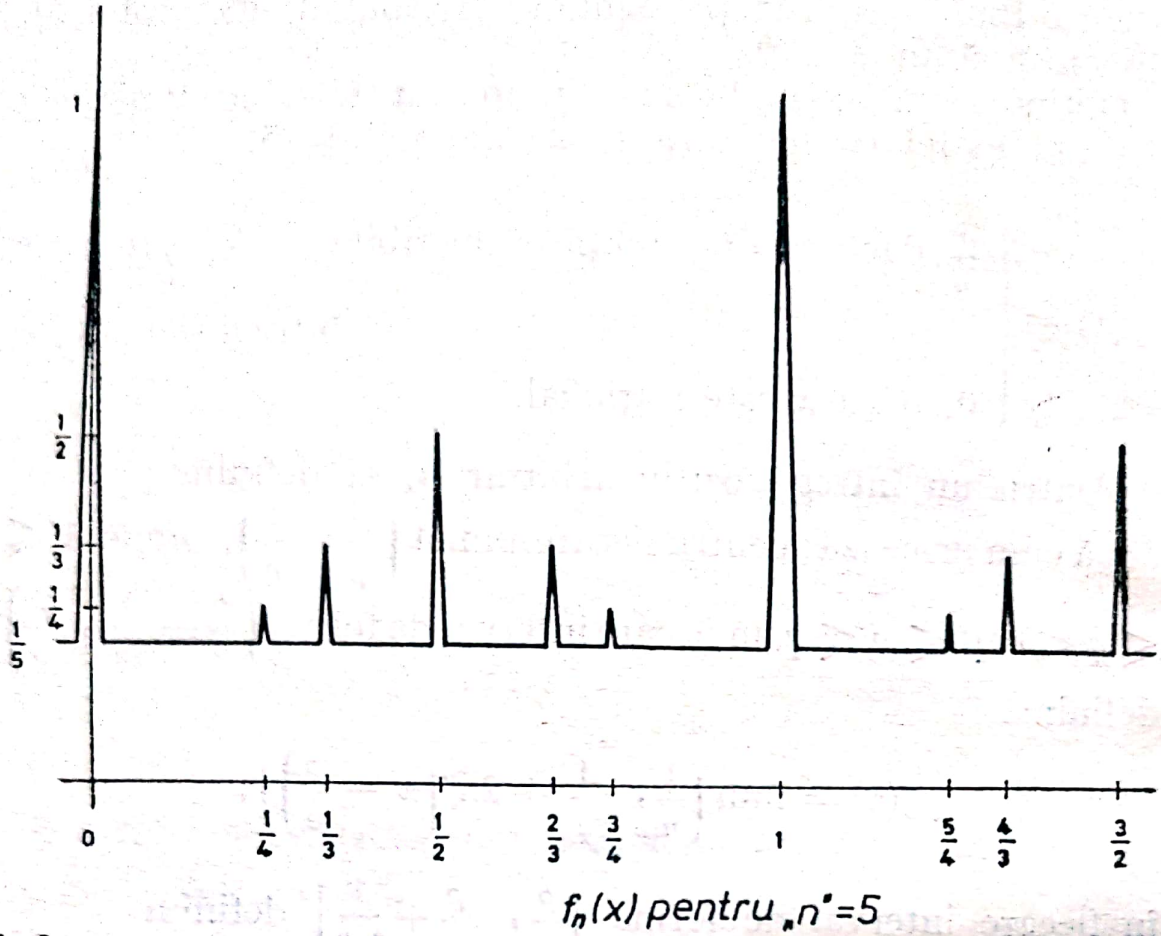


Fig. 2.

şi

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x),$$

aşa cum am definit mai sus. Fiecare funcţie f_n este continuă peste tot, dar funcţia limită f este discontinuă pe mulţimea densă $\mathbf{Q}$ a numerelor raţionale (vezi Capitolul 2, Exemplul 24).

5. O limită neuniformă de funcţii integrabile Riemann, care nu este integrabilă Riemann. (Vezi Capitolul 8, Exemplul 33.)

Restricţia la intervalul închis [0,1] a fiecăreia din funcţiile g_n, definite pentru Exemplul 24 din Capitolul 2, este integrabilă Riemann pe acest interval, deoarece este mărginită

Scanned with OKEN Scanner

și are un număr finit de puncte de discontinuitate. Șirul $\{g_n\}$ este un șir crescător ($g_n(x) \leqslant g_{n+1}(x)$ pentru orice x și $n = 1, 2, \ldots$), care converge spre funcția f din Exemplul 1, Capitolul 4, egală cu 1 pe $\mathbf{Q} \cap [0,1]$ și egală cu 0 pe $[0,1] \setminus \mathbf{Q}$.

6. Un șir de funcții pentru care limita integralelor nu este egală cu integrala limitei.

Fie

$$f_n(x) = \begin{cases} 2n^2x, & \text{dacă } 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2n}, \\ n - 2n^2\left(x - \frac{1}{2n}\right), & \text{dacă } \frac{1}{2n} \leqslant x \leqslant \frac{1}{n}, \\ 0, & \text{dacă } \frac{1}{n} \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

Atunci,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

dar

$$\int_0^1 \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\,dx = \int_0^1 0\,dx = 0.$$

Alt exemplu este șirul $\{f_n(x)\}$, unde $f_n(x) = nxe^{-nx}$, $0 \leqslant x \leqslant 1$.

Un caz extrem este dat de

$$f_n(x) = \begin{cases} 2n^3x, & \text{dacă } 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2n}, \\ n^2 - 2n^3\left(x - \frac{1}{2n}\right), & \text{dacă } \frac{1}{2n} \leqslant x \leqslant \frac{1}{n}, \\ 0, & \text{dacă } \frac{1}{n} \leqslant x \leqslant 1, \end{cases}$$

cînd, pentru orice $b \in (0,1]$,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^b f_n(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{2} = +\infty,$$

Scanned with OKEN Scanner

în timp ce

$$\int_0^b \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\,dx = \int_0^b 0\,dx = 0.$$

7. Un șir de funcții pentru care limita derivatelor nu este egală cu derivata limitei.

Dacă $f_n(x) = x/(1+n^2x^2)$ pentru $-1 \leqslant x \leqslant 1$ și $n = 1, 2, \ldots$ atunci $f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$ există și este egală cu 0 pentru toți $x \in [-1,1]$ (această convergență este uniformă, deoarece valorile maximă și minimă ale lui $f_n(x)$ pe $[-1,1]$ sînt $\pm\frac{1}{2n}$). Derivata limitei este identic egală cu 0. Totuși, limita derivatelor este

$$\lim_{n\to+\infty} f_n'(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1-n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2} = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x = 0, \\ 0, & \text{dacă } 0 < |x| \leqslant 1. \end{cases}$$

8. O convergență uniformă pe orice subinterval închis, dar neuniformă pe întreg intervalul.

Fie $f_n(x) = x^n$ pe intervalul deschis $(0,1)$.

9. Un șir $\{f_n\}$, care converge uniform către zero pe $[0, +\infty)$, dar este astfel încît $\int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx \not\to 0$.

Fie

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{dacă } 0 \leqslant x \leqslant n, \\ 0, & \text{dacă } x > n. \end{cases}$$

Atunci $f_n(x)$ converge uniform spre 0 pe $[0, +\infty)$, dar

$$\int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx = 1 \to 1.$$

Scanned with OKEN Scanner

Un caz extrem este dat de

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{dacă } 0 \leqslant x \leqslant n^2, \\ 0, & \text{dacă } x > n^2. \end{cases}$$

Atunci,

$$\int_0^{+\infty} f_n(x)\, dx = n \to +\infty.$$

10. O serie care converge neuniform, dar al cărei termen general tinde uniform către zero.

Pe intervalul semideschis $[0,1)$, seria $\sum_{n=1}^{+\infty} x^n/n$ are proprietatea dorită. Convergența uniformă spre zero a termenului general rezultă imediat din faptul că pe intervalul $[0,1]$ acest termen este dominat de $1/n$. Convergența seriei rezultă din faptul că este dominată de seria Σx^n, care converge pe $[0,1)$. Neuniformitatea convergenței seriei este o consecință a faptului că sumele parțiale nu sînt mărginite uniform (seria armonică este divergentă; a se vedea [34], p. 447, Ex. 31 și 32).

11. Un șir care converge neuniform, dar care conține un subșir uniform convergent.

Fie pe mulțimea $\boldsymbol{R}$ a numerelor reale

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{x}{n}, & \text{dacă } n \text{ este impar}, \\ \frac{1}{n}, & \text{dacă } n \text{ este par}. \end{cases}$$

Convergența la zero este neuniformă, dar convergența subșirului $\{f_{2n}(x)\} = \{1/2n\}$ este uniformă.

12. Șiruri neuniform convergente care satisfac oricare trei din cele patru condiții ale teoremei lui Dini.

Scanned with OKEN Scanner

Teorema lui Dini afirmă că dacă $\{f_n\}$ este un șir de funcții definite pe o mulțime A, care converge pe A la o funcție f și dacă

(*i*) f_n este continuă pe A, $n = 1,2,\ldots$,
(*ii*) f este continuă pe A,
(*iii*) convergența este monotonă
(*iv*) A este compactă,

atunci convergența este uniformă.

Nici un subgrup de trei condiții din cele patru nu implică convergența uniformă. Cu alte cuvinte, nici una din cele patru ipoteze nu poate fi omisă. Următoarele patru exemple demonstrează acest fapt.

$$(i) \quad f_n(x) = \begin{cases} 0, \text{ dacă } x = 0 \text{ sau } \frac{1}{n} \leqslant x \leqslant 1, \\ 1, \text{ dacă } 0 < x < \frac{1}{n}. \end{cases}$$

Atunci $\{f_n(x)\}$ este un șir descrescător pentru orice x, care converge neuniform spre funcția continuă $f(x) = 0$ pe mulțimea compactă $[0,1]$.

(*ii*) Șirul descrescător $\{x^n\}$ converge neuniform către funcția discontinuă

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ dacă } 0 \leqslant x < 1, \\ 1, \text{ dacă } x = 1, \end{cases}$$

pe mulțimea compactă $[0,1]$.

(*iii*) Vezi Exemplul 6.

(*iv*) Șirul $\{x^n\}$ pe $[0,1)$.

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul 8

Mulţimi şi măsură pe axa reală

Introducere

Dacă nu se specifică contrariul, toate mulţimile considerate în acest capitol sînt presupuse a fi submulţimi ale mulţimii numerelor reale $\boldsymbol{R}$. Se numeşte **σ-inel,** sau **sigma-inel,** o clasă nevidă **A** de mulţimi, închisă faţă de operaţiile de reuniune numerabilă de mulţimi şi diferenţă a mulţimilor ($A_1, A_2, \ldots \in \mathbf{A} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathbf{A}$ şi $A_1 \setminus A_2 \in \mathbf{A}$). Dacă **A** este o clasă nevidă] oarecare de mulţimi, σ-inelul **generat** de **A** este intersecţia tuturor σ-inelelor care conţin pe **A** (există totdeauna cel puţin un σ-inel care conţine pe **A,** clasa *tuturor* submulţimilor din $\boldsymbol{R}$, astfel încît există totdeauna σ-inelul generat). Este firesc să ne reprezentăm σ-inelul generat de **A** ca fiind *cel mai mic* σ-inel care conţine pe **A.** σ-inelul generat de clasa **C** a tuturor submulţimilor compacte din $\boldsymbol{R}$ se numeşte clasa **B** a **mulţimilor Borel** (adică, o mulţime este mulţime Borel, dacă şi numai dacă este element al σ-inelului generat de **C**).

Dacă A este o submulţime oarecare a lui $\boldsymbol{R}$, iar x este un număr real oarecare, **translatata** lui A prin x se defineşte şi se notează astfel:

$$x + A = \{y \mid y = x + a, a \in A\} = \{x + a \mid a \in A\}.$$

O clasă **A** de mulţimi este **închisă faţă de translaţii,** dacă şi numai dacă

$$A \in \mathbf{A},\ x \in \boldsymbol{R} \Rightarrow x + A \in \mathbf{A}.$$

Dacă **S** este un σ-inel de submulțimi ale unui spațiu X, o funcție de mulțime ρ, cu domeniul de definiție **S**, este **nenegativă** cu **valori reale extinse,** dacă și numai dacă pentru orice $S \in \mathbf{S}$ valorile lui ρ satisfac dubla inegalitate $0 \leqslant \rho(S) \leqslant +\infty$. O funcție nenegativă, cu valori reale extinse, ρ, definită pe un σ-inel **S** este o **măsură** pe **S**, dacă și numai dacă $\rho(\emptyset) = 0$ și ρ este **numerabil aditivă** pe **S**: $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots \in \mathbf{S}$, $S_m \cap S_n = \emptyset$ pentru $m \neq n \Rightarrow$

$$\rho\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} S_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \rho(S_n).$$

Dacă ρ este o măsură pe un σ-inel **S** de submulțimi ale unui spațiu X și dacă $X \in \mathbf{S}$, atunci perechea ordonată $(X, \mathbf{S})$ se numește **spațiu măsurabil**, și ρ se numește **măsură** pe spațiul măsurabil $(X, \mathbf{S})$. Dacă din context este subînțeleasă clasa **S** de mulțimi, atunci poate fi utilizată numai litera X pentru a indica un spațiu măsurabil. Dacă ρ și σ sînt două măsuri pe același spațiu măsurabil $(X, \mathbf{S})$, atunci ρ este **absolut continuă** în raport cu σ (se scrie $\rho \ll \sigma$), dacă și numai dacă

$$A \in \mathbf{S},\ \sigma(A) = 0 \Rightarrow \rho(A) = 0.$$

Pentru orice măsură ρ pe un spațiu măsurabil $(X, \mathbf{S})$ se numește **mulțime nulă** pentru ρ orice submulțime a unei mulțimi A din **S**, cu măsura zero: $\rho(A) = 0$. O măsură ρ pe $(X, \mathbf{S})$ este **completă,** dacă și numai dacă orice mulțime nulă pentru ρ este element al lui **S.**

Măsura Borel este măsura μ, unic determinată pe spațiul măsurabil $(\boldsymbol{R}, \mathbf{B})$, care asociază oricărui interval mărginit și închis lungimea lui:

$$\mu([a, b]) = b - a, \text{ dacă } a \leqslant b.$$

Clasa $\tilde{\mathbf{B}}$ de mulțimi măsurabile Lebesgue este σ-inelul generat de reuniunea lui **B** cu clasa tuturor mulțimilor de măsură Borel nulă. Măsura Lebesgue este măsura completă, unic determinată pe $\tilde{\mathbf{B}}$, a cărei restricție la **B** este măsura Borel; adică, măsura Lebesgue este *completarea* sau *extinderea completă* la $\tilde{\mathbf{B}}$ a măsurii Borel de pe **B**.

Scanned with OKEN Scanner

Deoarece lungimea unui interval compact $[a, b]$ este invariantă față de translații, σ-inelele $\mathbf{B}$ și $\widetilde{\mathbf{B}}$ sînt invariante față de translații și atît măsura Borel cît și cea Lebesgue sînt **invariante față de translații**:

$$A \in \mathbf{B},\ x \in \boldsymbol{R} \Rightarrow x + A \in \mathbf{B},\ \mu(x + A) = \mu(A),$$

$$A \in \widetilde{\mathbf{B}},\ x \in \boldsymbol{R} \Rightarrow x + A \in \widetilde{\mathbf{B}},\ \mu(x + A) = \mu(A).$$

Pentru orice mulțime $E \subset \boldsymbol{R}$ se definesc *măsura Lebesgue interioară* și *măsura Lebesgue exterioară* și acestea se notează în felul următor:

măsura interioară a lui $E = \mu_*(E) = \sup\{\mu(A) \mid A \subset E, A \in \widetilde{\mathbf{B}}\}$

măsura exterioară a lui $E = \mu^*(E) = \inf\{\mu(A) \mid A \supset E, A \in \widetilde{\mathbf{B}}\}$.

Acestea sînt egale și cu

$$\mu_*(E) = \sup\{\mu(A) \mid A \subset E, A \in \mathbf{B}\} = \sup\{\mu(A) \mid A \subset E, A \text{ compactă}\},$$

$$\mu^*(E) = \inf\{\mu(A) \mid A \supset E, A \in \mathbf{B}\} = \inf\{\mu(A) \mid A \supset E, A \text{ deschisă}\}.$$

Pentru demonstrarea acestor rezultate și pentru discuții mai ample, a se vedea [16],[18], [30] și [32].

Din cînd în cînd ne vom referi la axioma alegerii sau alte variante ale ei, ca teorema de bună ordonare, sau lema lui Zorn. Acestea sînt uneori prezentate cu titlul de *principiul de maximalitate*. Cititorul este trimis la [16], [30] și [46].

Se va presupune că cititorul este familiarizat cu noțiunile *de relație de echivalență* și *clase de echivalență*. Aceste noțiuni sînt tratate în [16] și [22].

1. O mulțime perfectă nicăieri densă.

O mulțime perfectă este o mulțime închisă în care fiecare punct este și punct limită al ei. O proprietate fundamentală a mulțimilor perfecte este că orice mulțime perfectă și nevidă

Scanned with OKEN Scanner

A de numere reale, sau, mai general, orice mulțime perfectă nevidă dintr-un spațiu metric complet și separabil, este nenumărabilă; de fapt, A are cardinalul $\mathfrak{c}$ al lui $\boldsymbol{R}$ (există o corespondență biunivocă cu domeniul de definiție $\boldsymbol{R}$ și domeniul valorilor A). (Pentru demonstrație și discuție a se vedea [20], pp.129 — 138.)

O mulțime **nicăieri densă** este o mulțime A a cărei închidere $\bar{A}$ nu conține puncte interioare: $I(\bar{A}) = \emptyset$. Evident, o mulțime este nicăieri densă, dacă și numai dacă închiderea ei este nicăieri densă, și orice submulțime a unei mulțimi nicăieri dense este nicăieri densă. Mai puțin evident este faptul că reuniunea oricărei familii finite de mulțimi nicăieri dense este o mulțime nicăieri densă. Se poate face o demonstrație prin inducție pornind de la cazul particular: *Dacă A și B sînt închise și nicăieri dense, atunci $A \cup B$ este nicăieri densă.* (Dacă U este o submulțime deschisă nevidă a lui $A \cup B$, atunci $U \setminus B$ este o submulțime deschisă nevidă a lui A).

G. Cantor (matematician german, 1845—1918) a dat un exemplu celebru de mulțime perfectă nicăieri densă, cunoscută sub numele de **mulțimea lui Cantor**. Această mulțime C se obține din intervalul unitate închis [0,1] printr-o succesiune de excluderi de intervale deschise cunoscute sub numele de „treimi mijlocii". Se procedează în modul următor: întîi excludem toate punctele x cuprinse între $\frac{1}{3}$ și $\frac{2}{3}$. Apoi, înlăturăm treimile mijlocii ale celor două intervale închise $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ și $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$ rămase, și anume $\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right)$ și $\left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$. Apoi, excludem treimile mijlocii ale celor patru intervale închise $\left[0, \frac{1}{9}\right]$, $\left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right]$, $\left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right]$ și $\left[\frac{8}{9}, 1\right]$ rămase, și anume $\left(\frac{1}{27}, \frac{2}{27}\right)$, $\left(\frac{7}{27}, \frac{8}{27}\right)$, $\left(\frac{19}{27}, \frac{20}{27}\right)$ și $\left(\frac{25}{27}, \frac{26}{27}\right)$. Procedeul este continuat *ad infinitum* cu rezultatul că mulțimea totală de puncte excluse din [0, 1] este reuniunea unui șir de intervale deschise și este deci o

Scanned with OKEN Scanner

mulțime deschisă. Mulțimea C este mulțimea închisă rămasă. Dat fiind că oricît de aproape de orice punct al lui C există capete ale intervalelor excluse (aceste capete aparțin lui C), C este perfectă. Deoarece nu există nici un interval deschis în $[0,1]$ care să nu aibă puncte comune cu cel puțin unul din intervalele ale cărui puncte au fost excluse într-una din etapele procesului, mulțimea închisă C este nicăieri densă.

Mulțimea lui Cantor C poate fi definită cu ajutorul sistemului de numerație ternară (în baza trei). Un punct $x \in C$, dacă și numai dacă poate fi exprimat în serie ternară folosind numai cifrele 0 și 2. De exemplu, 0,022222.... și 0,20000... sînt capetele primului interval exclus, respectiv $\frac{1}{3}$ și $\frac{2}{3}$ în notația cu fracții ordinare*). Pentru o discuție asupra acestui mod de scriere a lui C, a se vedea [18] și [32]; de asemenea, următorul Exemplul 2.

2. O mulțime nenumerabilă de măsură nulă.

Mulțimea lui Cantor C din Exemplul 1 nu este numerabilă, deoarece este o mulțime perfectă nevidă; măsura ei este zero, deoarece mulțimea punctelor excluse din intervalul închis $[0,1]$ are măsura

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}+\cdots=\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{2}{3}}=1.$$

Exprimarea ternară a punctelor mulțimii lui Cantor poate fi folosită pentru a demonstra că C are cardinalul $\mathfrak{c}$ al mulțimii numerelor reale $\boldsymbol{R}$. (Această metodă este independentă de cea citată mai sus, bazată pe proprietățile mulțimilor perfecte). În primul rînd, punctele lui C sînt în corespondență biunivocă cu dezvoltările ternare care folosesc numai cifrele 0 și 2 și deci (împărțim la 2) cu dezvoltările *bi-*

*) Text corectat. — *N. T.*

Scanned with OKEN Scanner

nare care folosesc pe 0 și pe 1. În al doilea rînd, dezvoltările binare *infinite* sînt în corespondență biunivocă cu punctele intervalului semideschis (0, 1], deci cu numerele reale. Aceasta arată că mulțimea *tuturor* dezvoltărilor binare (deci și C) nu este numerabilă, avînd cardinalul *cel puțin* $\mathfrak{c}$. Pentru a demonstra că într-adevăr cardinalul este *egal* cu $\mathfrak{c}$, trebuie numai să observăm că mulțimea dezvoltărilor binare *finite* este numerabilă (sau, mai simplu, că $C \subset \boldsymbol{R}$). Pentru discuții mai ample asupra aplicației descrise trimitem la Exemplul 14 din acest capitol.

3. O mulțime de măsură nulă a cărei mulțime diferență conține o vecinătate a originii.

Dacă A este o mulțime nevidă, **mulțimea diferență** $D(A)$ este mulțimea tuturor diferențelor între elementele lui A:

$$D(A) = \{x - y \mid x \in A,\ y \in A\}.$$

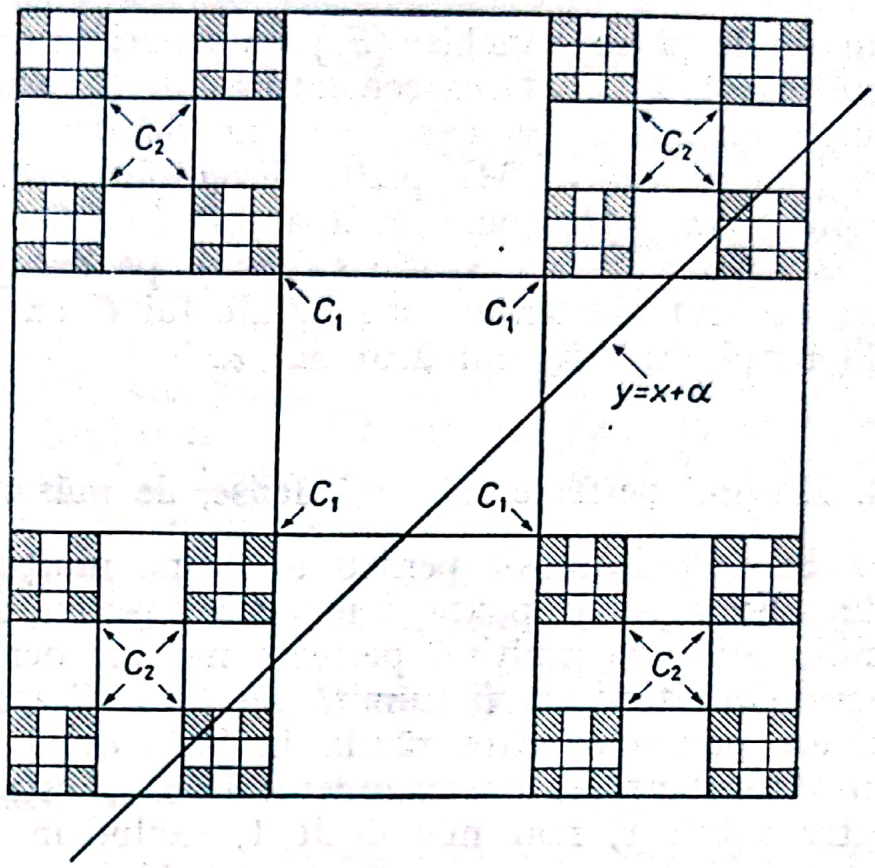
Un rezultat de oarecare importanță în teoria măsurii constă în faptul că ori de cîte ori A este o mulțime măsurabilă de măsură pozitivă, originea este un punct interior al mulțimii diferență a lui A (a se vedea [18], p. 68). Mulțimea lui Cantor C din Exemplul 1 este un exemplu de mulțime de măsură *nulă* care are această proprietate. De fapt, mulțimea diferență a lui C este întregul interval finit $[-1, 1]$:

$$D(C) = [-1, 1].$$

Cea mai simplă cale pe care putem vedea acest lucru este să considerăm mulțimea produs $C \times C$ și să arătăm că pentru orice număr α cu proprietatea $-1 \leqslant \alpha \leqslant 1$, dreapta $y = x + \alpha$ intersectează pe $C \times C$ în cel puțin un punct (a se vedea [10], p. 110, unde se dau și indicații bibliografice). Dat fiind că C se obține printr-un șir de excluderi de „treimi mijlocii", mulțimea $C \times C$ poate fi gîndită ca intersecția unei familii numerabile de mulțimi închise C_1, C_2, ..., fiecare din mulțimile C_n fiind o reuniune de „pătrate de colț "(fig. 3):

Scanned with OKEN Scanner

Fig. 3.



Mulțimea C_1 este formată din patru pătrate închise $\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}$ situate în colțurile pătratului total $[0,1]\times[0,1]$: $\left[0,\frac{1}{3}\right]\times\left[0,\frac{1}{3}\right]$, $\left[0,\frac{1}{3}\right]\times\left[\frac{2}{3},1\right]$, $\left[\frac{2}{3},1\right]\times\left[0,\frac{1}{3}\right]$ și $\left[\frac{2}{3},1\right]\times\left[\frac{2}{3},1\right]$; mulțimea C_2 constă din 16 pătrate închise $\frac{1}{9}\times\frac{1}{9}$, situate în grupuri de patru în colțurile celor patru pătrate C_1; mulțimea C_3 constă din 64 pătrate închise $\frac{1}{27}\times\frac{1}{27}$, situate în grupuri de patru în cele patru colțuri ale pătratelor C_2 etc. Pentru orice $\alpha\in[-1,1]$ dat, dreapta $y=x+\alpha$ intersectează cel puțin unul din cele patru pătrate din C_1; să alegem un asemenea pătrat și să-l notăm S_1. Această dreaptă trebuie să intersecteze și cel puțin unul din cele patru pătrate ale lui C_2, situate în interiorul lui S_1; să alegem un asemenea pătrat și să-l notăm cu S_2. Dacă continuăm procesul, obținem

un şir de pătrate închise $\{S_n\}$, cu proprietatea $S_{n+1} \subset S_n$ pentru $n = 1, 2, \ldots$. Deoarece latura lui S_n este 3^{-n}, există un singur punct (x, y) care aparţine *fiecărui* pătrat al şirului $\{S_n\}$ (a se vedea [34], p.201, Exemplul 30). Prin urmare, punctul (x, y) trebuie să aparţină lui $C \times C$, şi deoarece acest punct trebuie să fie situat şi pe dreapta $y = x + \alpha$, am obţinut elementele x şi y ale lui C cu proprietatea că diferenţa lor este numărul dat α.

4. Mulţimi perfecte, nicăieri dense, de măsură pozitivă.

Procedeul folosit pentru a obţine mulţimea lui Cantor din Exemplul 1 poate fi modificat pentru a construi o familie utilă de mulţimi perfecte nicăieri dense. Fiecare din aceste mulţimi va fi numită *mulţime Cantor* şi este mulţimea punctelor care rămîn în [0,1] după ce a avut loc următorul proces de excludere: Dacă α este un număr pozitiv arbitrar, mai mic decît 1, excludem întîi din [0,1] toate punctele intervalului deschis $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\alpha, \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\alpha\right)$, cu ungimea $\frac{1}{2}\alpha$ şi cu centrul $\frac{1}{2}$. Excludem apoi din cele două lntervale închise rămase $\left[0, \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\alpha\right]$ şi $\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\alpha, 1\right]$, fiecare cu lungimea $\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\alpha\right)$, intervalele deschise centrale, cu lungimea $\frac{1}{8}\alpha$ fiecare. Apoi, din cele patru intervale închise rămase, fiecare cu lungimea $\frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{4}\alpha\right)$, excludem intervalele deschise centrale, fiecare cu lungimea $\frac{\alpha}{32}$. Din cele opt intervale închise rămase, fiecare cu lungimea $\frac{1}{8}\left(1 - \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{4}\alpha - \frac{1}{8}\alpha\right)$, excludem intervalele deschise centrale, fiecare cu lungimea $\frac{\alpha}{128}$. După n paşi, măsura re-

Scanned with OKEN Scanner

uniunii intervalelor deschise excluse este $\alpha\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\right.$ $\left.+\frac{1}{2^n}\right)$, şi deci măsura reuniunii intervalelor deschise excluse prin întregul şir de operaţii este egală cu α. Măsura mulţimii Cantor rămase este $1-\alpha$. De aceea, mulţimile Cantor definite în acest mod se numesc **mulţimi Cantor de măsură pozitivă.** Ele sînt mulţimi perfecte nicăieri dense. În Exemplul 23 de mai jos vom arăta că toate mulţimile Cantor de măsură pozitivă, sau nulă, sînt homeomorfe (a se vedea Introducerea la Capitolul 12). Va rezulta apoi din al doilea alineat al Exemplului 2 de mai sus că *orice mulţime Cantor are cardinalul* $\mathfrak{c}$ *egal cu al lui* $\boldsymbol{R}$.

Al treilea mod de construire a unei mulţimi Cantor este următorul: Fie $0<\beta<1$ şi fie $\{\beta_n\}$ un şir de numere pozitive astfel încît $\sum_{n=0}^{+\infty} 2^n\beta_n=\beta$. Să extragem din $[0,1]$ intervalul deschis I_0, centrat în $\frac{1}{2}$ şi cu lungimea β_0. Apoi excludem din $[0,1]\setminus I_0$ două intervale deschise I_1^1 şi I_1^2, fiecare centrat într-unul din cele două intervale închise disjuncte a căror reuniune este $[0,1]\setminus I_0$ fiecare dintre intervalele I_1^1 şi I_1^2 avînd lungimea β_1. Continuăm excluderile ca în construcţiile precedente. În a n-a etapă sînt excluse 2^n intervale deschise $I_n^1, I_n^2, \ldots, I_n^{2^n}$, fiecare de lungime β_n, şi fiecare centrat în cîte unul din intervalele închise care alcătuiau restul lăsat de excluderile din etapa $n-1$, $n=1, 2, \ldots$.

5. O mulţime perfectă, nicăieri densă, de numere iraţionale. Un ultim exemplu de mulţime perfectă nicăieri densă poate fi construit apelînd la şirul $\{r_n\}$, ai cărui termeni formează mulţimea numerelor raţionale din $(0,1)$. Începem ca în definiţia mulţimii lui Cantor C, dar extindem intervalul deschis astfel încît centrul său să rămînă în $\frac{1}{2}$, capetele sale să fie iraţionale iar punctul r_1 să fie conţinut în acest interval extins. În a doua etapă excludem din fiecare din cele două

Scanned with OKEN Scanner

intervale închise rămase o „treime mijlocie" extinsă în așa fel încît centrele rămîn centre, capetele sînt iraționale și este exclus și al doilea număr rațional r_2. Dacă acest proces se repetă după schema indicată, ceea ce rămîne este o mulțime perfectă nicăieri densă; dat fiind că toate numerele raționale dintre 0 și 1 au fost excluse, această mulțime „Cantor" D este formată în întregime din numere iraționale, cu excepția celor două puncte 0 și 1. Dacă intervalul inițial este ales în așa fel încît capetele sale să fie numere iraționale, putem construi o mulțime perfectă, nicăieri densă, formată în întregime din numere iraționale.

6. O mulțime densă, deschisă, a cărei complementară nu are măsura nulă.

Fie A o mulțime Cantor de măsură pozitivă în $[0,1]$ și fie $B = A' = \boldsymbol{R} \setminus A$. Atunci B este o mulțime densă deschisă, a cărei complementară A are măsura pozitivă.

7. O mulțime de categoria a doua.

Se spune că o mulțime este de *categoria întîia*, dacă și numai dacă ea este o reuniune numerabilă de mulțimi nicăieri dense. Orice submulțime a unei mulțimi de categoria întîia este tot o mulțime de categoria întîia și orice reuniune numerabilă de mulțimi de categoria întîia este o mulțime de categoria întîia. Mulțimea $\boldsymbol{Q}$ a numerelor raționale este de categoria întîia. Se spune despre o mulțime că este de *categoria a doua*, dacă și numai dacă nu este de categoria întîia. Un exemplu de mulțime de categoria a doua este mulțimea $\boldsymbol{R}$ a tuturor numerelor reale. Mai general, orice spațiu metric complet (nevid — *N. T.*) este de categoria a doua (a se vedea [36], p.338, Ex. 33). Acest rezultat general a fost obținut de R. Baire (a se vedea [1], p.108, [20], pp. 138—145 și [27], p.204). Din aceasta rezultă că mulțimea $\boldsymbol{R} \setminus \boldsymbol{Q}$ a numerelor iraționale este de categoria a doua. Independent de teorema generală deja citată, schițăm acum o

Scanned with OKEN Scanner

demonstrație a faptului că orice mulțime A de numere reale, cu interior $I(A)$ nevid, este de categoria a doua. Să presupunem contrariul și fie C un interval închis nelul $[a, b]$, interior lui A și fie, de asemenea, $C = F_1 \cup F_2 \cup \ldots$, unde mulțimile F_n sînt *închise* și nicăieri dense, $n = 1, 2, \ldots$. Fie C_1 un interval închis $[a_1, b_1] \subset (a, b) \setminus F_1$; fie C_2 un interval închis $[a_2, b_2] \subset (a_1, b_1) \setminus F_2$; în general, pentru $n > 1$ fie $C_n = [a_n, b_n] \subset (a_{n-1}, b_{n-1}) \setminus F_n$. Atunci există un punct p care aparține *fiecărui* C_n, $n = 1, 2, \ldots$ (a se vedea [34], p.201, Ex. 30), de unde $p \in C$. Dar aceasta este imposibil, deoarece p *nu* aparține nici unui F_n, $n = 1, 2, \ldots$. (Contradicție.)

8. O mulțime care nu este o mulțime F_σ.

Amintim (Capitolul 2, Exemplul 23) că o *mulțime* F_σ este o reuniune numerabilă de mulțimi închise. Exemplele de mulțimi F_σ abundă: mulțimi finite, intervale închise, intervale deschise (de exemplu, (0,1) este reuniunea mulțimilor $[1/n, (n-1)/n]$), intervalele semideschise, $\boldsymbol{Q}$ (dacă numerele raționale sînt aranjate într-un șir $r_1, r_2, \ldots$, atunci $\boldsymbol{Q}$ este reuniunea mulțimilor închise formate dintr-un singur punct $\{r_1\}, \{r_2\}, \ldots, \{r_n\}, \ldots$. Un exemplu de mulțime care *nu* este o mulțime F_σ este mulțimea $\boldsymbol{R} \setminus \boldsymbol{Q}$ a numerelor iraționale. Să presupunem contrariul și fie $\boldsymbol{R} \setminus \boldsymbol{Q} = C_1 \cup C_2 \cup \ldots$, unde C_n sînt închise, $n = 1, 2 \ldots$. Deoarece nici o submulțime a mulțimii $\boldsymbol{R} \setminus \boldsymbol{Q}$ a numerelor iraționale nu conține puncte interioare, orice submulțime închisă a lui $\boldsymbol{R} \setminus \boldsymbol{Q}$ este nicăieri densă; aceasta implică că $\boldsymbol{R} \setminus \boldsymbol{Q}$ este de categoria întîi. (Contradicție, vezi Exemplul 7.)

9. O mulțime care nu este o mulțime G_δ.

O mulțime A este *o mulțime* G_δ, dacă și numai dacă este o intersecție numerabilă de mulțimi deschise. Din **regulile lui de Morgan** pentru complementarea mulțimilor:

$$\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right)' = \bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n', \quad \left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n\right)' = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n'$$

Scanned with OKEN Scanner

rezultă că o mulțime A este o mulțime G_δ, dacă și numai dacă complementara ei $A' = \boldsymbol{R} \setminus A$ este o mulțime F_σ. De aceea, dat fiind că mulțimea $\boldsymbol{R} \setminus \boldsymbol{Q}$ a numerelor iraționale nu este o mulțime F_σ, mulțimea $\boldsymbol{Q}$ a numerelor raționale nu este o mulțime G_δ.

Dacă se alcătuiesc reuniuni numerabile de mulțimi G_δ și intersecții numerabile de mulțimi F_σ, atunci se obțin două noi clase de mulțimi numite mulțimi $G_{\delta\sigma}$ și respectiv $F_{\sigma\delta}$. De fapt, există două șiruri infinite de asemenea clase, desemnate prin $F_\sigma, F_{\sigma\delta}, F_{\sigma\delta\sigma}, \ldots$ și $G_\delta, G_{\delta\sigma}, G_{\delta\sigma\delta}, \ldots$. Pentru teoria acestor mulțimi trimitem la [20].

10. O mulțime A care nu poate fi mulțime a punctelor de discontinuitate a unei funcții.

Fie A mulțimea $\boldsymbol{R} \setminus \boldsymbol{Q}$ a numerelor iraționale. Dat fiind că A nu este o mulțime F_σ, nu există nici o funcție reală de variabilă reală care să aibă pe A ca mulțime de puncte de discontinuitate (a se vedea observația finală din Capitolul 2, Exemplul 23). Cu alte cuvinte, nu există nici o funcție de la $\boldsymbol{R}$ la $\boldsymbol{R}$, continuă în fiecare punct rațional și discontinuă n fiecare punct irațional (vezi Capitolul 2, Exemplul 15).

11. O mulțime nemăsurabilă.

Axioma alegerii oferă o cale de construire a unei mulțimi care nu este măsurabilă Lebesgue. De fapt, mulțimea astfel construită nu poate fi măsurabilă în raport cu *nici o* măsură invariantă la translații, numerabil aditivă, nenulă. Mai exact, dacă μ este o măsură definită pentru toate mulțimile A de numere reale, finită pentru mulțimi mărginite și cu proprietatea

$$\mu(x + A) = \mu(A),$$

pentru orice $x \in \boldsymbol{R}$ și $A \subset \boldsymbol{R}$, atunci $\mu(A) = 0$ pentru orice $A \subset \boldsymbol{R}$. Vom demonstra această afirmație.

Scanned with OKEN Scanner

Pornim de la o relaţie de echivalenţă $\sim$ definită pe $(0,1]\times$ $\times(0,1]$, după cum urmează: $x \sim y$, dacă şi numai dacă $x - y \in \mathbf{Q}$. Cu ajutorul relaţiei $\sim$ intervalul semideschis $(0, 1]$ este partiţionat în clase de echivalenţă disjuncte C. Aplicînd axioma alegerii acestei familii de clase de echivalenţă, obţinem o mulţime A cu proprietăţile: (1) nici o pereche de puncte distincte din A nu aparţine aceleiaşi clase C de echivalenţă; (2) orice clasă de echivalenţă C conţine un punct al lui A. În funcţie de relaţia de echivalenţă $\sim$ aceste două proprietăţi devin: (1) două elemente distincte ale lui A nu sînt echivalente; (2) orice punct x din $(0, 1]$ este echivalent cu un element din A. Definim acum pentru orice $r \in (0, 1]$ o operaţie pe mulţimea A, numită **translaţie modulo 1**:

$$(r + A) \pmod 1 = [(r + A) \cup ((r - 1) + A)] \cap (0, 1] =$$
$$= \{(r + A) \cap (0, 1]\} \cup \{((r - 1) + A) \cap (0, 1]\}.$$

În cazul translaţiilor modulo 1, cele două proprietăţi ale lui A menţionate mai sus implică: (1) dacă r şi s sînt numere raţionale distincte din $(0,1]$, atunci mulţimile $(r + A) \pmod 1$ şi $(s + A) \pmod 1$ sînt disjuncte.

(2) orice număr real x din $(0,1]$ este element al unei mulţimi $(r + A) \pmod 1$ pentru un anumit număr raţional r din $(0,1]$. Cu alte cuvinte, intervalul semideschis $(0,1]$ este reuniunea colecţiei numerabile de mulţimi două cîte două disjuncte $\{(r + A) \pmod 1\}$, unde $r \in \mathbf{Q} \cap (0,1]$. O proprietate importantă a mulţimilor obţinute din A prin translaţia modulo 1 (pe baza ipotezelor asupra lui μ) este aceea de a avea aceeaşi măsură ca şi A:

$$\mu((r + A) \pmod 1) = \mu((r+A) \cap (0,1]) + \mu((r-1) + A) \cap (0,1])$$
$$= \mu((r + A) \cap (0,1]) + \mu((r + A) \cap (1,2])$$
$$= \mu((r + A) \cap (0,2]) = \mu(r + A) = \mu(A).$$

Pe baza faptului că A are măsura pozitivă deducem, ştiind că μ este numerabil aditivă,

$$\mu((0,1]) = \sum_{r \in \mathbf{Q} \cap (0,1]} \mu((r + A) \pmod 1) = \sum_{r \in \mathbf{Q} \cap (0,1]} \mu(A) = \infty,$$

Scanned with OKEN Scanner

ceea ce este imposibil, dat fiind că $(0,1]$ este mărginită. În consecință, $\mu(A) = 0$ și

$$\mu((0,1]) = \sum_{r \in \mathbb{Q} \cap (0,1]} \mu((r + A) \pmod 1) = \sum_{r \in \mathbb{Q} \cap (0,1]} \mu(A) = 0,$$

de unde

$$\mu(\boldsymbol{R}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mu((n, n+1]) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mu((0,1]) = 0.$$

În consecință, μ este măsura banală, pentru care fiecare mulțime are măsura nulă.

În sfîrșit, dat fiind că măsura Lebesgue este o măsură nenulă invariantă la translații, pentru care intervalele mărginite au măsură finită pozitivă, raționamentele amănunțite de mai sus demonstrează că *mulțimea A nu este măsurabilă Lebesgue.*

Dat fiind că toate mulțimile F_σ și toate mulțimile G_δ sînt mulțimi Borel, și deci sînt măsurabile, mulțimea nemăsurabilă construită mai înainte este un exemplu de mulțime care nu este nici mulțime F_σ nici mulțime G_δ.

Construcția descrisă poate fi gîndită în termeni de mulțimi pe un cerc: Să considerăm cercul unitate $\Gamma = \{z \mid z \in \boldsymbol{C}, |z| = 1\}$ din planul complex $\boldsymbol{C}$, ca grup față de înmulțire. Pentru fiecare $z \in \Gamma$ există un singur θ cu $0 \leqslant \theta < 1$, astfel ca $z = e^{2\pi i\theta}$. Fie $\Gamma_0 = \{z \mid z = e^{2\pi i\theta},\ \theta \in \boldsymbol{Q},\ 0 \leqslant \theta < 1\}$. Atunci Γ_0 este un divizor normal și există grupul cît $\mathcal{S} = \Gamma/\Gamma_0$. Dacă $\tilde{\mathcal{S}}$ este o preimagine biunivocă a lui $\mathcal{S}$ în Γ (un sistem complet de reprezentanți în Γ), obținută prin aplicarea axiomei alegerii, și dacă măsura Lebesgue μ pe $[0,1)$ este dusă în măsura $\tilde{\mu}$ pe Γ după regula

$E \subset \Gamma$ este **măsurabilă,** dacă și numai dacă $F = \{\theta \mid e^{2\pi i\theta} \in E, 0 \leqslant \theta < 1\}$ este măsurabilă Lebesgue și $\tilde{\mu}(E) = 2\pi\mu(F)$, atunci $\tilde{\mathcal{S}}$ nu este măsurabilă. Într-adevăr, $\bigcup_{\theta \in \mathbb{Q} \cap [0,1)} . e^{2\pi i\theta} \tilde{\mathcal{S}}$ este o reuniune numerabilă de mulțimi disjuncte, fiecare măsurabilă și toate cu aceeași măsură, dacă $\tilde{\mathcal{S}}$ este măsurabilă. Mai mult, această reuniune este egală cu Γ, dat fiind că $\tilde{\mathcal{S}}$ este un sistem complet de reprezentanți; deci, dacă $\tilde{\mathcal{S}}$ este măsurabilă, Γ este

Scanned with OKEN Scanner

o reuniune numerabilă de mulțimi disjuncte, măsurabile, toate cu aceeași măsură. Dat fiind că $\tilde{\mu}(\Gamma) = 2\pi$, vedem că $\tilde{\mu}(\tilde{S})$ nu poate fi pozitiv. Dar, dacă $\tilde{\mu}(\tilde{S}) = 0$, atunci $\tilde{\mu}(\Gamma) = 0$.

Metodele expuse mai sus pot fi extinse la grupuri topologice mai generale; de exemplu, la grupuri compacte care au divizori normali infiniți numerabili. (A se vedea [22], pentru definiția și discuția noțiunilor de grup, divizor normal etc. Idem [29], pentru grupuri topologice).

12. O mulțime D cu proprietatea că pentru orice mulțime măsurabilă A, $\mu_*(D \cap A) = 0$ și $\mu^*(D \cap A) = \mu(A)$.

O mulțime D cu această proprietate poate fi concepută intuitiv ca fiind culmea nemăsurabilității — D este o mulțime cît se poate de nemăsurabilă! Ca și în cazul mulțimii nemăsurabile A din Exemplul 11, mulțimea D este construită cu ajutorul axiomei alegerii, dar detaliile sînt ceva mai complicate. Pentru o discuție completă, a se vedea [18], p. 70. Acest exemplu arată că orice mulțime măsurabilă A conține o mulțime a cărei măsură interioară este egală cu zero și a cărei măsură exterioară este egală cu măsura lui A. Exemplul demonstrează și că *orice mulțime de măsură pozitivă conține o submulțime nemăsurabilă.*

F. Galvin a construit o familie $\{E_t\}$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, de submulțimi ale lui [0,1], două cîte două disjuncte, cu proprietatea că fiecare are măsura exterioară 1.

13. O mulțime A de măsură nulă cu proprietatea că orice număr real este un punct de condensare al lui A.

Un punct p este **punct de condensare** al unei mulțimi A, dacă și numai dacă orice vecinătate a lui p conține o mulțime nenumerabilă de puncte ale lui A. Fie C mulțimea lui Cantor din Exemplul 1, și pentru orice interval închis $[\alpha, \beta]$, unde $\alpha < \beta$, să definim mulțimea $C(\alpha, \beta)$ în modul următor:

$$C(\alpha, \beta) = \{\alpha + (\beta - \alpha)\, x \mid x \in C\}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Atunci $C(\alpha, \beta)$ este o mulțime perfectă nicăieri densă, de măsură zero. Fie B reuniunea tuturor mulțimilor $C(\alpha, \beta)$ pentru α și β raționali, unde $\alpha < \beta$. Dat fiind că B este o reuniune numerabilă de mulțimi de măsură nulă, este și ea o mulțime de măsură nulă. Pe de altă parte, dat fiind că *orice* interval deschis I trebuie să conțină o mulțime $C(\alpha, \beta)$ și dat fiind că *orice* $C(\alpha, \beta)$ nu este numerabilă, orice număr real trebuie să fie un punct de condensare al lui B (Vezi [14], p.287).

14. O mulțime A de numere reale, nicăieri densă, și o aplicație continuă a lui A pe intervalul închis [0, 1].

Mulțimea A poate fi *orice* mulțime Cantor (Exemplele 1 și 4), deoarece toate mulțimile Cantor sînt homeomorfe (Exemplul 23). Vom descrie o anumită aplicație φ pentru *mulțimea Cantor* din Exemplul 1. Aplicația este cea descrisă în cel de al doilea alineat al Exemplului 2: Pentru orice $x \in C$, fie $0, c_1c_2c_3 \ldots$ dezvoltarea sa în sistemul ternar, unde $c_n = 0$ sau 2, $n = 1, 2, \ldots$ și fie

$$\varphi(x) = 0, \frac{c_1}{2}\frac{c_2}{2}\frac{c_3}{2}\ldots,$$

expresia din dreapta fiind interpretată, de data aceasta, ca o dezvoltare *binară* în funcție de cifrele 0 și 1. Evident că imaginea lui C prin φ este o submulțime a lui [0,1]. Pentru a arăta că $[0,1] \subset \varphi(C)$ alegem un $y \in [0,1]$ oarecare și o dezvoltare binară a lui y:

$$y = 0, b_1b_2b_3 \ldots .$$

Atunci

$$x = 0, (2b_1)\,(2b_2)\,(2b_3)\ldots$$

(evaluat în sistemul ternar) este un punct din C cu proprietatea că $\varphi(x) = y$. Nu este greu de stabilit continuitatea lui φ; demonstrația este mai convenabilă în termeni geometrici, așa cum se procedează în exemplul următor în care

Scanned with OKEN Scanner

aplicația φ este extinsă pînă la o aplicație continuă pe întregul interval unitate [0,1].

De observat că φ nu este biunivocă. Într-adevăr, aceasta ar fi imposibil, deoarece C și [0,1] nu sînt homeomorfe și orice aplicație continuă și biunivocă a unei mulțimi compacte pe alta este un homeomorfism (a se vedea [34], p.192). (Mulțimea C este total discontinuă adică numai submulțimile ei formate dintr-un singur punct sînt conexe, pe cînd imaginea ei [0,1] este conexă.) Un exemplu de pereche de puncte din C, care au aceeași imagine, este perechea 0,022000000 și 0,020222222..., deoarece imaginile lor sînt 0,011000000... și 0,010111111... = 0,011000000. De fapt, două puncte x_1 și x_2 din C au aceeași imagine prin φ *dacă și numai dacă* sînt de forma:

$$x_1 = 0,c_1c_2 \ldots c_n2000\ldots \text{ și } x_2 = 0,c_1c_2 \ldots c_n0222 \ldots .$$

Cu alte cuvinte, $\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$, dacă și numai dacă x_1 și x_2 sînt capetele unuia din intervalele deschise excluse din [0,1] pentru construirea lui C. De aceea, φ este o funcție crescătoare pe C, și anume *strict* crescătoare, cu excepția perechilor de capete deja menționate. (A se vedea Exemplul 30.)

Următoarea teoremă este o extindere a „teoremei de existență" precedente și indică ce proprietăți pot avea în spațiile metrice imaginile continue și homeomorfe (topologice) ale mulțimii lui Cantor (în realitate, ale *oricărei* mulțimi Cantor, în virtutea Exemplului 23) și ale submulțimilor ei (pentru definiții a se vedea Introducerea de la Capitolul 12): *Orice spațiu metric separabil este imagine continuă a unei submulțimi a mulțimii lui Cantor. Orice spațiu metric compact este imaginea continuă a mulțimii lui Cantor. Orice spațiu metric compact total discontinuu este imaginea homeomorfă a unei submulțimi închise a mulțimii lui Cantor. Orice spațiu metric compact, perfect, total discontinuu, este imaginea homeomorfă a mulțimii lui Cantor.* (A se vedea [1], pp.119—122.)

15. O funcție continuă și monotonă a cărei derivată se anulează aproape peste tot.

Funcția definită în Exemplul 14 poate fi extinsă în așa fel încît domeniul ei de definiție să coincidă cu întregul

interval $[0,1]$: Dacă $x \in [0,1] \setminus C$, atunci x este un element al unuia din intervalele deschise (a, b) excluse din $[0,1]$ în procesul construirii mulțimii C, și deci $\varphi(a) = \varphi(b)$; să definim $\varphi(x) = \varphi(a) = \varphi(b)$. Cu alte cuvinte, φ este definit ca fiind constantă pe închiderea fiecăruia din intervalele excluse. Pe intervalul $\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$, $\varphi(x) = \frac{1}{2}$. Pe intervalele $\left[\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right]$ și $\left[\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right]$, valorile lui φ sînt respectiv $\frac{1}{4}$ și $\frac{3}{4}$. Pe intervalele $\left[\frac{1}{27}, \frac{2}{27}\right]$, $\left[\frac{7}{27}, \frac{8}{27}\right]$, $\left[\frac{19}{27}, \frac{20}{27}\right]$ și $\left[\frac{25}{27}, \frac{26}{27}\right]$, valorile lui φ sînt respectiv $\frac{1}{8}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{8}$ și $\frac{7}{8}$. Dacă procedeul este repetat la infinit, vedem că funcția φ, cu domeniul de definiție $[0,1]$, este crescătoare și (local) constantă într-o *anumită* vecinătate a *fiecărui* punct din $[0,1] \setminus C$ (vezi fig. 4).

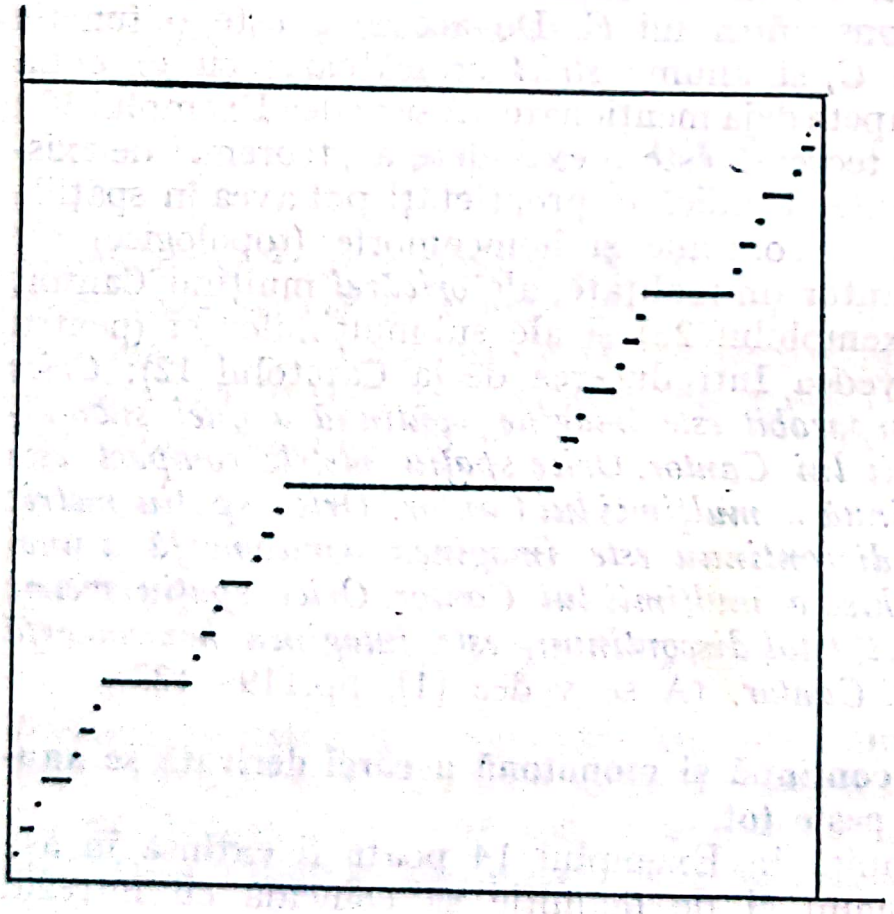


Fig. 4

Scanned with OKEN Scanner

Dat fiind că φ este crescătoare pe [0,1] și imaginea lui φ este întregul interval [0,1], φ nu are discontinuități (salturi). Dat fiind că discontinuitățile unei funcții monotone nu pot fi decît salturi (a se vedea [34], p.52, Ex. 24), φ este continuă. Deoarece φ este local constantă pe submulțimea *deschisă* $[0,1]\setminus C$, care are măsura 1, $\varphi'(x) = 0$ aproape peste tot în [0,1]. Funcția φ astfel definită este *funcția lui Cantor*.

Pe căi similare celei pe care a fost definită *funcția* lui Cantor pornind de la *mulțimea* lui Cantor, pot fi definite alte „funcții Cantor", pornind de la alte mulțimi Cantor (de măsură pozitivă). Poate că cea mai simplă cale de a defini, în funcție de o mulțime Cantor A dată în [0,1], funcția Cantor corespunzătoare g, este de a defini întîi pe g pe închiderile intervalelor eliminate succesiv: pe intervalul central $g(x) = \frac{1}{2}$; pe următoarele două intervale valorile lui g sînt $\frac{1}{4}$ și $\frac{3}{4}$, pe următoarele patru, valorile sînt $\frac{1}{8}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{7}{8}$ etc. Funcția g este crescătoare pe submulțimea densă $[0,1]\setminus A$ iar domeniul valorilor lui g este dens în [0,1]. Prin urmare, domeniul de definiție al lui g poate fi extins pînă la [0,1], astfel încît g să fie crescătoare și continuă pe [0,1], cu domeniul valorilor egal cu [0,1].

Folosind Exemplul 5 — o „mulțime Cantor" de numere iraționale — putem construi o funcție h crescătoare și continuă pe [0,1], cu domeniul valorilor [0,1] și cu proprietatea că $h'(x) = 0$ pentru *orice* număr rațional $x \in [0,1]$. De fapt, pentru x rațional, domeniul valorilor lui $h(x)$ poate fi ales egal cu întreaga mulțime $\boldsymbol{Q} \cap [0,1]$ de puncte raționale din [0,1], în loc să coincidă numai cu mulțimea punctelor de forma $m/2^n$, ca în exemplul precedent. Astfel obținem o funcție care satisface cerințele Exemplului 11 (g), Capitolul 1.

Pentru un exemplu *strict* monoton, a se vedea Exemplul 30.

Scanned with OKEN Scanner

16. O aplicație topologică a unui interval închis, care distruge atît măsurabilitatea cît și măsura nulă.

Dacă φ este funcția Cantor din Exemplul 15, să definim o funcție ψ prin:

$$\psi(x) = x + \varphi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

cu domeniul valorilor [0, 2]. Deoarece φ este crescătoare și continuă pe [0, 1], este *strict* crescătoare și topologică pe [0, 1] (continuă și biunivocă, cu o inversă continuă pe domeniul valorilor lui ψ). Deoarece orice interval deschis exclus din [0, 1] la construirea mulțimii lui Cantor C este aplicat prin ψ pe un interval de aceeași lungime din [0,2], $\mu(\psi(I \setminus C)) = \mu(I \setminus C) = 1$, de unde $\mu(\psi(C)) = 1$. Deoarece C este o mulțime de măsură nulă, ψ este un exemplu de aplicație topologică care aplică o mulțime de măsură nulă pe o mulțime de măsură pozitivă. Fie acum D o submulțime nemăsurabilă a lui $\psi(C)$ (vezi Exemplul 12). Atunci $\psi^{-1}(D)$ este o submulțime a mulțimii C de măsură nulă, și de aceea este o mulțime (măsurabilă) de măsură nulă. Prin urmare, ψ este un exemplu de aplicație topologică, care aplică o mulțime măsurabilă pe o mulțime nemăsurabilă. (Vezi Exemplul 23.)

17. O mulțime măsurabilă neborelieană.

Mulțimea $\psi^{-1}(D)$ din Exemplul 16 este o mulțime măsurabilă dar, deoarece ea este imaginea printr-o aplicație topologică a unei mulțimi neboreliene D, $\psi^{-1}(D)$ nu este o mulțime borelianã. (A se vedea [20], p.195.)

18. Două funcții continue care nu diferă printr-o constantă, dar care au derivate identice peste tot (în sens finit sau infinit).

Acest exemplu a fost dat de Rey Pastor [38] (a se vedea și [10], p.133)*). Fie φ funcția lui Cantor din Exemplul 15. Să definim pe intervalul unitate [0,1] funcția $h(x)$ egală cu zero pe mulțimea lui Cantor C; pe fiecare interval deschis

*) Acest exemplu dat de Pastor este incorect. Pentru un exemplu corect a se vedea S. Saks, *Theory of the integral*, Varșovia, 1937, pp.205—206.

Scanned with OKEN Scanner

(a, b), exclus în procesul construirii lui C, să definim pe $h(x)$ astfel încît graficul ei să fie alcătuit din două semicercuri congruente, cu diametrul pe axa x, un semicerc fiind situat deasupra axei x, la stînga intervalului (a, b), și celălalt semicerc sub axa x, la dreapta intervalului (a, b):

$$h(x) = \begin{cases} \left[\left(\frac{b-a}{4}\right)^2 - \left(x - \frac{3a+b}{4}\right)^2\right]^{1/2}, & \text{dacă } a < x \leqslant \frac{a+b}{2}, \\ -\left[\left(\frac{b-a}{4}\right)^2 - \left(x - \frac{a+3b}{4}\right)^2\right]^{1/2}, & \text{dacă } \frac{a+b}{2} \leqslant x < b. \end{cases}$$

Atunci h este continuă peste tot pe intervalul $[0,1]$. În sfîrșit, fie $f(x) = 2\varphi(x) + h(x)$ și $g(x) = \varphi(x) + h(x)$. Atunci $f'(x) = g'(x)$ pentru $0 \leqslant x \leqslant 1$. Într-adevăr, dacă x aparține mulțimii lui Cantor C, atunci $f'(x) = g'(x) = +\infty$. Dacă x este mijlocul unui interval exclus, $f'(x) = g'(x) = -\infty$. În sfîrșit, pentru orice alt punct rămas $x \in [0,1] \setminus C$, $f'(x) = g'(x) = h'(x)$. Pe de altă parte, $f(x) - g(x) = \varphi(x)$, și $\varphi(x)$ nu este o funcție constantă.

19. O mulțime din $[0, 1]$, de măsură 1 și de categoria întîi.

Primul exemplu: Fie A_n o mulțime a lui Cantor în $[0,1]$ de măsură $(n-1)/n$, $n = 1, 2, \ldots$, și fie $A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots$. Atunci, deoarece pentru $n = 1, 2, \ldots$, A_n este nicăieri densă, A este de categoria întîi. Pe de altă parte, deoarece

$$\mu(A_n) = \frac{n-1}{n} \leqslant \mu(A) \leqslant 1,$$

pentru $n = 1, 2, \ldots$, avem $\mu(A) = 1$.

Al doilea exemplu: O altă mulțime de acest tip este complementara (față de intervalul unitate) a mulțimii din al doilea exemplu dat în Exemplul 20 care urmează.

Scanned with OKEN Scanner

20. O mulțime din [0,1], de măsură nulă și categoria a doua.

Primul exemplu: Dacă A este mulțimea din primul exemplu din Exemplul 19 de mai sus, atunci complementara lui A, $A' = [0,1] \setminus A$ este o mulțime de categoria a doua (dacă ar fi de categoria întîi, intervalul [0,1] ar fi reuniunea a două mulțimi de categoria întîi și deci ar fi și el de categoria întîi), și de măsură nulă ($\mu([0, 1] \setminus A) + \mu(A) = 1$).

Al doilea exemplu: Fie $\boldsymbol{Q} \cap [0,1]$ domeniul valorilor unui șir $\{r_n\}$ și, pentru fiecare pereche k și n de întregi pozitivi, fie I_{kn} un interval deschis de lungime $< 2^{-k-n}$ și care conține pe r_n. Dacă $A_k = \bigcup_{n=1}^{+\infty} I_{kn}$, iar $B_k = [0, 1] \setminus A_k$, atunci A_k este o mulțime deschisă care conține pe $\boldsymbol{Q} \cap [0,1]$ și are măsura $\mu(A_k) < 2^{-k}$; deci B_k este o mulțime compactă, nicăieri densă, cu măsura $\mu(B_k) > 1 - 2^{-k}$. (Măsura lui A_k este mai mică decît, sau egală, cu suma lungimilor intervalelor I_{kn}, $n = 1, 2, \ldots$, iar B_k nu poate avea puncte interioare, dat fiind că este formată numai din numere iraționale.) Prin urmare, mulțimea $B = \bigcup_{k=1}^{+\infty} B_k$ este o submulțime a lui [0,1] de măsură 1 și de categoria întîi; mulțimea $A = \bigcap_{k=1}^{+\infty} A_k = [0,1] \setminus B$ este o submulțime a lui [0,1], de măsură nulă și de categoria a doua.

21. O mulțime de măsură nulă care nu este o mulțime F_σ.

Primul exemplu: Primul exemplu din Exemplul 20 nu poate fi o reuniune numerabilă de mulțimi închise $F_1, F_2, \ldots$, deoarece în acest caz fiecare F_n ar fi o mulțime închisă de măsură nulă și, deci, ar fi nicăieri densă. Aceasta ar însemna că mulțimea considerată ar fi de categoria întîi. (Contradicție.)

Al doilea exemplu: Din aceleași considerente, și al doilea exemplu din Exemplul 20 are proprietățile enunțate.

Scanned with OKEN Scanner

Al treilea exemplu: Mulțimea neboreliană din Exemplul 17 are măsura nulă, dar nu poate fi o mulțime F_σ, deoarece orice mulțime F_σ este o mulțime Borel.

22. O mulțime de măsură nulă pentru care nu există nici o funcție — integrabilă Riemann sau nu — avînd mulțimea dată ca mulțime a punctelor de discontinuitate.

Oricare din mulțimile din Exemplul 21 este o mulțime de acest tip, deoarece pentru orice funcție de la $\boldsymbol{R}$ în $\boldsymbol{R}$ mulțimea punctelor de discontinuitate este o mulțime F_σ (a se vedea Capitolul 2, Exemplul 23 și Capitolul 4, Exemplul 8).

Exemplul de față este interesant mai ales în legătură cu teorema: *O condiție necesară și suficientă pentru ca o funcție cu valori reale, definită și mărginită pe un interval compact, să fie integrabilă Riemann pe acel interval, este ca mulțimea punctelor de discontinuitate ale funcției să aibă măsura nulă* (a se vedea [36], p.153, Ex. 54). La o citire neatentă a teoremei am putea fi induși să credem că este implicată *orice* mulțime de măsură nulă, dat fiind că condiția teoremei este *atît* necesară *cît și* suficientă.

23. Două mulțimi perfecte, homeomorfe, nicăieri dense în [0,1] dintre care numai una este de măsură nulă.

Vom demonstra chiar mai mult: Dacă C este mulțimea lui Cantor de măsură nulă pe [0,1] și dacă A este *orice* mulțime a lui Cantor de măsură pozitivă pe [0,1], atunci există un homeomorfism f al lui [0,1] pe [0,1] astfel ca $f(C) = A$. Ca un corolar al acestei teoreme se constată imediat că *toate mulțimile lui Cantor sînt homeomorfe.*

Ideea construirii aplicației este asemănătoare celei din definiția funcției lui Cantor (Exemplul 15): Se aranjează intervalele I_1, I_2, ... și intervalele J_1, J_2, ..., excluse din [0,1] în procesul construirii mulțimilor C și A, într-o aceeași „ordine", și anume fie I_1 și J_1 intervalele mijlocii excluse în primul pas; fie apoi I_2 și J_2 intervalele „mijlocii din stînga"

Scanned with OKEN Scanner

și I_3 și J_3 intervalele „mijlocii din dreapta" excluse în pasul următor etc. Apoi cu ajutorul unei funcții liniare și crescătoare se aplică închiderea lui I_n pe închiderea lui J_n pentru $n = 1, 2, \ldots$. Atunci f este definită și strict crescătoare pe o submulțime densă a lui [0,1], și, dat fiind că și domeniul valorilor ei este dens în [0,1], prelungirea continuă a lui f la [0,1] este imediată, așa cum a fost descrisă în al doilea alineat din Exemplul 15 (vezi fig. 5). Funcția f construită în acest exemplu este de tipul funcțiilor căutate în Exemplul 16.

24. Două mulțimi de numere reale, disjuncte, nevide, nicăieri dense, cu proprietatea că fiecare punct al fiecărei mulțimi este punct limită al celeilalte.

Fie A orice mulțime Cantor din [0,1], iar B submulțimea lui A ale cărei elemente sînt capetele intervalelor deschise

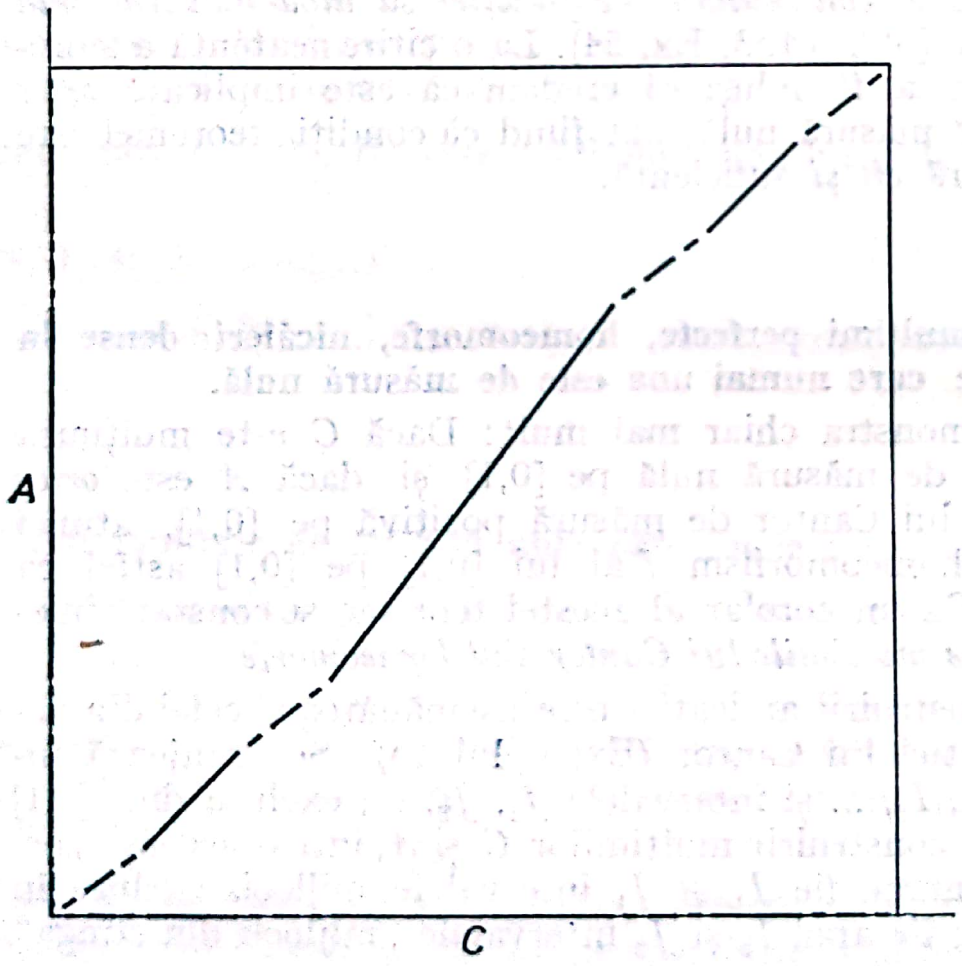


Fig. 5.

excluse din [0,1] în procesul construirii lui A. Fie $E = A \setminus B$. Atunci B și E satisfac condițiile cerute.

Se pot construi ușor exemple dacă spațiul care conține mulțimile nu este obligatoriu $\boldsymbol{R}$. De exemplu, în planul euclidean, mulțimea numerelor raționale de pe axa x și mulțimea numerelor iraționale de pe axa x au proprietățile indicate.

25. Două mulțimi homeomorfe de numere reale, de categorii diferite.

Începem prin a defini o funcție continuă și crescătoare pe [0,1], asemănătoare cu o funcție a lui Cantor definită în cel de al doilea alineat al Exemplului 15. În cazul de față, fie $\{J_n\}$ șirul mulțimilor deschise excluse din [0,1] în procesul construirii unei mulțimi Cantor A, ca în Exemplul 23, și fie $\{s_n\}$ o aplicație biunivocă a lui $\boldsymbol{N}$ pe $\boldsymbol{Q} \cap (0,1)$. Să definim șirul $\{r_n\}$ în modul următor: fie $r_1 = s_1$, $r_2 = s_n$, unde n este cel mai mic întreg pozitiv pentru care $s_n < r_1$; $r_3 = s_n$, unde n este cel mai mic întreg pozitiv astfel ca $s_n > r_1$; $r_4 = s_n$, unde n este cel mai mic întreg pozitiv astfel încît $s_n < r_2$; $r_5 = s_n$, unde n este cel mai mic întreg pozitiv astfel ca $r_2 < s_n < r_1$; $r_6 = s_n$, unde n este cel mai mic întreg pozitiv astfel ca $r_1 < s_n < r_3$; $r_7 = s_n$, unde n este cel mai mic întreg pozitiv astfel ca $s_n > r_3$. Continuînd procedeul, numerele raționale cuprinse între 0 și 1 sînt aranjate într-un șir $\{r_n\}$ în care, după cum se vede din fig.6, relația de ordonare corespunde celei din șirul intervalelor J_n. Cu alte cuvinte, $r_m < r_n$, dacă și numai dacă J_m este la stînga lui J_n.

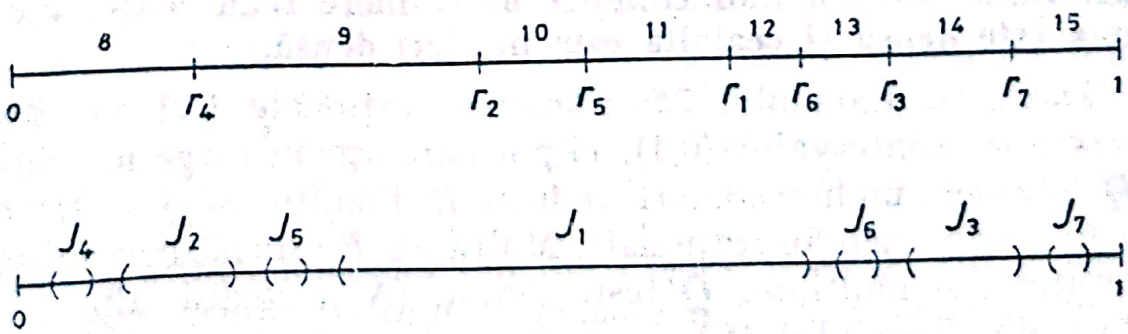


Fig. 6

Definim acum funcţia f, astfel încît $f(x) = r_n$, dacă x aparţine închiderii $\bar{J}_n$ a lui J_n, $n = 1, 2, \ldots$. Ca şi în Exemplul 15, funcţia f este definită şi crescătoare pe o submulţime densă din $[0,1]$, iar domeniul valorilor ei este dens în $[0,1]$. Deci f poate fi prelungită la o funcţie continuă şi crescătoare, care aplică $[0,1]$ pe $[0,1]$. Dacă B şi E sînt definite ca în Exemplul 24, atunci f aplică pe B pe mulţimea $\boldsymbol{Q} \cap (0,1)$, iar pe E — pe mulţimea $(0,1) \setminus \boldsymbol{Q}$ a tuturor numerelor iraţionale cuprinse între 0 şi 1. În ultimul caz, aplicaţia lui E pe $(0,1) \setminus \boldsymbol{Q}$ este strict crescătoare şi *bicontinuă*. (Continuitatea aplicaţiei inverse rezultă din corespondenţa care există între relaţia de ordine dintre elementele lui E şi relaţia de ordine dintre punctele lui $(0,1) \setminus \boldsymbol{Q}$.) Deci, E şi $(0,1) \setminus \boldsymbol{Q}$ sînt homeomorfe. Prin urmare *orice mulţime a lui Cantor lipsită de „capete" este homeomorfă cu mulţimea numerelor iraţionale cuprinse între* 0 şi 1. Dar E este nicăieri densă şi deci este de categoria întîi, în timp ce $(0,1) \setminus \boldsymbol{Q}$ este de categoria a doua (a se vedea Exemplul 7).

Trebuie observat că, spre deosebire de mulţimile din Exemplul 23, homeomorfismul din exemplul de faţă nu poate fi indus dintr-un homeomorfism între intervalele care le conţine. (Dacă două spaţii sînt homeomorfe şi dacă două mulţimi corespund prin acest homeomorfism, atunci, dacă una este nicăieri densă, şi cealaltă are aceeaşi proprietate; dacă una este de categoria întîi, cealaltă este şi ea de aceeaşi categorie.)

26. Două mulţimi homeomorfe de numere reale astfel încît una este densă şi cealaltă este nicăieri densă.

Dacă, în Exemplul 25, numerele raţionale $\{r_n\}$ nu sînt restrînse la intervalul $(0,1)$, ci pot parcurge întreaga mulţime $\boldsymbol{Q}$, obţinem un homeomorfism între E şi mulţimea $\boldsymbol{Q}' = \boldsymbol{R} \setminus \boldsymbol{Q}$ a *tuturor* numerelor iraţionale. Mulţimea E este nicăieri densă, în timp ce mulţimea $\boldsymbol{Q}'$ este densă. (A se vedea alineatul final din Exemplul 25.)

Scanned with OKEN Scanner

27. O funcție definită pe R, egală cu zero aproape peste tot și al cărei domeniu de valori este R, pe orice interval deschis nevid.

Vom ajunge, parcurgînd cîteva etape, la construirea unei funcții f care să aibă proprietățile enunțate. Mai întîi să definim pe intervalul deschis $(0,1)$ o funcție g care aplică mulțimea $C \cap (0, 1)$ pe $\boldsymbol{R}$, unde C este mulțimea lui Cantor de măsură nulă. Dacă φ este funcția lui Cantor (Exemplul 15), atunci g poate fi definită astfel

$$g(x) = \operatorname{tg}\left[\pi\left(\varphi(x) - \frac{1}{2}\right)\right], \quad 0 < x < 1.$$

A doua etapă constă în a defini, pentru orice interval deschis $I = (a, b)$, o submulțime Z_I de măsură nulă și o funcție g_I cu domeniul de definiție Z_I și domeniul valorilor $\boldsymbol{R}$. Aceasta se poate face în modul următor:

$$Z_I = \{a + (b - a)\, x \mid x \in C \cap (0,1)\},$$

$$g_I(x) = g\left(\frac{x - a}{b - a}\right), \quad x \in Z_I.$$

Funcția căutată f o definim dîndu-i valoarea zero pe mulțimea $\boldsymbol{Z}$ a întregilor. Definim acum un șir $\{U_n\}$ de mulțimi deschise în modul următor: Fie $U_1 = \boldsymbol{R} \setminus \boldsymbol{Z}$, care este reuniunea tuturor intervalelor deschise de forma $(n, n + 1)$, unde n este întreg. În *fiecare* din aceste intervale I, fie Z_I mulțimea de măsură nulă definită mai sus; pe Z_I funcția f este definită egală cu g_I. Submulțimea U_2 a lui U_1, pe care f nu a fost încă definită, este o mulțime deschisă și deci o reuniune de intervale deschise, disjuncte. În *fiecare* din aceste intervale I, fie Z_I mulțimea de măsură nulă definită mai sus, iar pe mulțimea Z_I definim pe f egal cu g_I. Submulțimea U_3 a lui U_2, pe care f nu a fost încă definită, este din nou o mulțime deschisă, deci o reuniune de intervale deschise disjuncte. Dacă definim din nou, ca mai sus, mulțimile Z_I, atunci domeniul funcției f poate fi extins iar, pentru a include aceste mulțimi de măsură nulă. Să continuăm pro-

Scanned with OKEN Scanner

cedeul cu ajutorul unui şir $\{U_n\}$ de mulţimi deschise, fiecare din ele avînd o complementară de măsură nulă. Astfel funcţia f este definită pe o mulţime de măsură nulă — complementara intersecţiei mulţimilor $U_1, U_2, \ldots$, sau, echivalent, reuniunea complementarelor lor $U_1', U_2', \ldots$ —, şi anume în aşa fel încît *orice* interval deschis nevid trebuie să conţină unul din intervalele deschise I ale uneia din mulţimile deschise U_n şi, deci, o mulţime Z_I, pentru care domeniul valorilor lui f este $\boldsymbol{R}$. În sfîrşit, să definim pe f ca fiind nulă în punctele în| care nu a fost încă definită.

28. O funcţie pe $\boldsymbol{R}$ al cărei grafic este dens în plan.

Funcţia din Exemplul 27 are această proprietate.

29. O funcţie f cu proprietatea că $0 \leqslant f(x) < +\infty$ peste tot, dar este astfel încît $\int_a^b f(x)\,dx = +\infty$ pentru orice interval deschis nevid (a, b).

Putem construi o funcţie cu aceste proprietăţi repetînd procedeul din Exemplul 27, cu următoarele două modificări: (i) înlocuim mulţimea C cu mulţimea lui Cantor de măsură $\frac{1}{2}$ din $[0,1]$ şi (ii) definim funcţia g_I în modul următor:

$$g_I(x) = \frac{1}{|I|^2}\,\chi(Z_I),$$

unde $|I|$ reprezintă lungimea intervalului I, iar $\chi(A)$ este funcţia caracteristică a mulţimii A (a se vedea Introducerea de la Capitolul 1). Fiecare din mulţimile Z_I are măsura $\frac{1}{2}|I|$, deci integrala lui g_I pe I este egală cu $1/(2|I|)$. Deoarece *orice* interval nevid de forma (c, d) conţine subintervale I de lungime arbitrar de mică, integrala $\int_c^d f(x)\,dx$ este arbitrar de mare şi deci, fiind o constantă, este egală cu $+\infty$.

Scanned with OKEN Scanner

30. O funcţie continuă, strict monotonă, a cărei derivată se anulează aproape peste tot.

A. C. Zaanen şi W. A. Luxembourg [3] au dat exemplul următor de funcţie f cu aceste proprietăţi: Dacă φ este funcţia lui Cantor din Exemplul 15, fie $\psi(x) = \varphi(x)$, cînd $x \in [0, 1]$ şi $\psi(x) = 0$, cînd $x \in \boldsymbol{R} \setminus [0, 1]$; fie $\{[a_n, b_n]\}$ şirul intervalelor închise $[0, 1]$, $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$, $\left[0, \frac{1}{4}\right]$, $\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$, ..., $\left[0, \frac{1}{8}\right]$, ... şi să definim

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} 2^{-n} \psi\left(\frac{x - a_n}{b_n - a_n}\right), \text{ pentru } 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

31. O funcţie mărginită şi semicontinuă care nu este nici integrabilă Riemann, nici echivalentă cu o funcţie integrabilă Riemann.

Funcţia caracteristică f a unei mulţimi Cantor A de măsură pozitivă pe $[0,1]$ este mărginită şi peste tot superior semicontinuă. Dat fiind că mulţimea punctelor ei de discontinuitate este A, care are măsura pozitivă, f nu este integrabilă Riemann pe $[0,1]$. Două funcţii sînt **echivalente**, dacă şi numai dacă ele sînt egale aproape peste tot. Dacă modificăm valorile lui f pe o mulţime de măsură nulă, rezultatul va fi o funcţie pentru care mulţimea punctelor de discontinuitate este tot o mulţime de măsură pozitivă.

32. O funcţie măsurabilă şi mărginită, care nu este echivalentă cu o funcţie integrabilă Riemann.

Funcţia din Exemplul 31 are această proprietate.

33. O limită mărginită şi monotonă de funcţii continue, care nu este integrabilă Riemann şi nici echivalentă cu o funcţie integrabilă Riemann. (A se vedea Capitolul 4, Exemplul 10.)

Funcţia f din Exemplul 31 poate fi obţinută ca limită a unui şir descrescător $\{f_n\}$ de funcţii continue în modul urmă-

Scanned with OKEN Scanner

tor: Pentru orice interval deschis $I = (a, b)$, unde $0 \leqslant a < b \leqslant 1$ și pentru orice întreg pozitiv n, să definim funcția

$$g_{n,I}(x) = \begin{cases} 1, \text{ dacă } 0 \leqslant x \leqslant a, \\ 1, \text{ dacă } b \leqslant x \leqslant 1, \\ 0, \text{ dacă } a + \dfrac{b-a}{2^n} \leqslant x \leqslant b - \dfrac{b-a}{2^n}, \\ \text{liniară, dacă } a \leqslant x \leqslant a + \dfrac{b-a}{2^n}, \\ \text{liniară, dacă } b - \dfrac{b-a}{2^n} \leqslant x \leqslant b. \end{cases}$$

Dacă $\{J_n\}$ este șirul de intervale deschise excluse din $[0,1]$ în procesul construirii mulțimii A de măsură pozitivă (a se vedea Exemplul 23), să definim șirul $\{f_n\}$ în modul următor:

$$f_1 = g_{1,J_1},$$
$$f_2 = g_{2,J_1} \cdot g_{2,J_2},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$f_n = g_{n,J_1} \cdot g_{n,J_2} \cdot \ldots \cdot g_{n,J_n}.$$

34. O funcție f, integrabilă Riemann, și o funcție g, continuă, ambele definite pe $[0,1]$, astfel încît funcția compusă $f(g(x))$ nu este nici integrabilă Riemann pe $[0,1]$ și nici nu este echivalentă cu o funcție integrabilă Riemann pe acest interval. (Vezi Capitolul 4, Exemplul 9.)

Funcția din Exemplul 31 este de forma $f(g(x))$, dacă $f(x)$ este definită ca fiind egală cu 0 pentru $0 \leqslant x < 1$ și 1 pentru $x = 1$, și dacă $g(x)$ este definită ca fiind egală cu 1 cînd $x \in A$, și cu $1 - \frac{1}{2}(b-a) + |x - \frac{1}{2}(a+b)|$, cînd x aparține unui interval $I = (a, b)$, exclus din $[0,1]$ în procesul con-

struirii lui A. Funcția $g(x)$ este continuă, deoarece pentru toți x_1 și x_2 din $[0,1]$ avem

$$|g(x_1) - g(x_2)| \leqslant |x_1 - x_2|.$$

Observăm că prin folosirea adecvată a unor „funcții de legătură" (a se vedea Capitolul 3, Exemplul 12), funcțiile $g_{n,I}$ din Exemplul 33 și porțiunile care definesc funcția g din Exemplul 34 — și, în consecință, funcțiile f_n din Exemplul 33 și funcția g din Exemplul 34 — pot fi înlocuite cu funcții indefinit derivabile.

În sfîrșit, trebuie observat că acest exemplu nu poate fi inversat. Cu alte cuvinte, orice funcție continuă (avînd ca domeniu un interval compact) de o funcție integrabilă Riemann este și ea integrabilă Riemann. (Vezi [36], p.154, Ex. 55.)

35. O funcție mărginită care are primitivă pe un interval închis, dar care nu este integrabilă Riemann pe acest interval.

Fie g o funcție definită pentru x pozitiv (vezi Capitolul 3, Exemplul 2) prin formula $g(x) = x^2 \sin(1/x)$ și, pentru orice număr pozitiv c, fie x_c cel mai mare număr pozitiv x mai mic decît, sau egal cu c, cu proprietatea că $g'(x) = 0$. Pentru orice număr pozitiv c să definim funcția g_c pentru $0 < x \leqslant c$ astfel:

$$g_c(x) = \begin{cases} g(x), \text{ dacă } 0 < x \leqslant x_c, \\ g(x_c), \text{ dacă } x_c \leqslant x \leqslant c. \end{cases}$$

Dacă A este orice mulțime Cantor de măsură pozitivă pe $[0,1]$, să definim funcția f în modul următor: Dacă $x \in A$, fie $f(x) = 0$; dacă x aparține unui interval $I = (a, b)$, exclus din $[0,1]$ la formarea lui A, fie

$$f(x) = \begin{cases} g_c(x - a), \text{ dacă } a < x \leqslant \frac{1}{2}(a + b), \\ g_c(-x + b), \text{ dacă } \frac{1}{2}(a + b) \leqslant x < b, \end{cases}$$

unde $c = \frac{1}{2}(b - a)$.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă x este un punct oarecare din A și dacă y este un *alt* punct oarecare din $[0,1]$, atunci sau $f(y) = 0$, sau y este un punct al unui interval exclus $I = (a, b)$. În primul caz, $|(f(y) - f(x))/(y - x)| = 0 < |y - x|$. În cel de al doilea caz, fie d extremitatea cea mai apropiată de y a intervalului (a, b); avem pentru $c = \frac{1}{2}(b - a)$:

$$\left|\frac{f(y) - f(x)}{y - x}\right| = \left|\frac{f(y)}{y - x}\right| \leqslant \left|\frac{f(y)}{y - d}\right| = \frac{|g_c(|y - d|)|}{|y - d|} \leqslant \frac{|y - d|^2}{|y - d|} =$$

$$= |y - d| \leqslant |y - x|.$$

Deci, în oricare din cazuri, $|(f(y) - f(x))/(y - x)| \leqslant |y - x|$ și, în consecință, $f'(x) = 0$ pentru orice $x \in A$.

Pe de altă parte, dacă x aparține oricăruia din intervalele excluse (a, b), avem

$$|f'(x)| \leqslant \left|2z \sin\left(\frac{1}{z}\right) - \cos\left(\frac{1}{z}\right)\right| \leqslant 3,$$

pentru un z cuprins între 0 și 1, astfel încît f este derivabilă peste tot pe $[a, b]$ și derivata ei, f', este mărginită pe $[a, b]$.

În sfîrșit, dat fiind că $\overline{\lim}_{y \to 0+} g'(y) = 1$ (a se vedea Introducerea de la Capitolul 2), rezultă că pentru orice punct x din A, $\overline{\lim}_{y \to x} f'(y) = 1$. Așadar, funcția f' este discontinuă în orice punct al lui A și, deci, pe o mulțime de măsură pozitivă. Funcția f' satisface deci toate condițiile specificate în enunțul de mai sus.

Matematicianul italian V. Volterra (1860—1940) a publicat (probabil primul) o construcție similară celei de mai sus în „Giorn. di Battaglini", **19**, 1881, pp. 353—372.

36. O funcție a cărei integrală (Riemann) improprie există, dar a cărei integrală Lebesgue nu există.

Dacă $f(x) = \sin x/x$ cînd $x \neq 0$ și $f(0) = 1$, atunci integrala improprie $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ converge condiționat (este semi-

convergentă ; a se vedea [34], p. 465), ceea ce înseamnă că integrala converge, dar $\int_0^{+\infty} |f(x)|\,dx = +\infty$. Aceasta înseamnă că funcția $|f(x)|$ nu este integrabilă Lebesgue pe $[0, +\infty)$ și deci nici $f(x)$.

37. O funcție măsurabilă Lebesgue, dar nemăsurabilă Borel. Funcția caracteristică a mulțimii măsurabile Lebesgue, neboreliene, din Exemplul 17, satisface această condiție.

38. O funcție $f(x)$ măsurabilă și o funcție $g(x)$ continuă cu proprietatea că funcția compusă $f(g(x))$ nu este măsurabilă. Folosind notația din Exemplul 16, fie $E = \psi^{-1}(D)$. Atunci funcția caracteristică $f = \chi_E$ a mulțimii E este măsurabilă și $g = \psi^{-1}$ este continuă, dar funcția compusă $f(g(x))$ este funcția caracteristică nemăsurabilă a mulțimii nemăsurabile D.

De observat că în exemplul de față nu se poate schimba locul funcțiilor f și g din enunț. Cu alte cuvinte, orice funcție continuă de o funcție măsurabilă este măsurabilă.

39. O funcție $g(x)$ continuă și monotonă și o funcție $f(x)$ continuă, astfel încît

$$\int_0^1 f(x)\,dg(x) \neq \int_0^1 f(x)\,g'(x)\,dx.$$

Fie $f(x) = 1$ pe $[0,1]$ și fie g funcția lui Cantor φ din Exemplul 15. Atunci integrala Riemann-Stieltjes (vezi [36], p.179) sau integrala Lebesgue-Stieltjes (a se vedea [18], [30] și [32]) din membrul stîng al inegalității de sus este egală cu $\varphi(1) - \varphi(0) = 1$, în timp ce integrala Lebesgue din membrul drept este egală cu 0, deoarece integrandul este aproape peste tot egal cu 0.

Scanned with OKEN Scanner

40. Şiruri de funcţii care converg în moduri diferite.

Dacă $f, f_1, f_2, \ldots$ sînt funcţii integrabile Lebesgue, fie pe intervalul unitate $[0,1]$ (mai general, pe o mulţime măsurabilă de măsură finită), fie pe mulţimea $\boldsymbol{R}$ a numerelor reale (sau, mai general, pe o mulţime măsurabilă de măsură infinită), atunci egalitatea

$$\lim_{n\to+\infty} f_n = f$$

poate fi interpretată în mai multe moduri. Vom considera aici patru semnificaţii specifice, vom indica implicaţiile dintre ele şi vom da contraexemple cînd nu există asemenea implicaţii. Domeniul de definiţie al funcţiilor considerate îl vom desemna prin S, care va reprezenta sau pe $[0,1]$, sau pe $\boldsymbol{R}$. Cele patru interpretări, pe care le vom menţiona, ale propoziţiei enunţate mai sus sînt:

(*i*) **Convergenţă aproape peste tot**[*)]

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x) \text{ pentru aproape orice } x\in S.$$

(*ii*) **Convergenţa în măsură**

$$\forall \varepsilon > 0,\ \lim_{n\to+\infty} \mu\{x \mid |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\} = 0.$$

(*iii*) **Convergenţa în medie**[**)]

$$\lim_{n\to+\infty} \int_S |f_n(x) - f(x)|\, dx = 0.$$

(*iv*) **Convergenţa dominată**[***)]

*) Un tip foarte înrudit de convergenţă este *convergenţa peste tot* banal legată de (*i*).

**) Este aceeaşi cu convergenţa în spaţiul Banach L^1 al tuturor funcţiilor integrabile, reduse modulo funcţiile egale aproape peste tot nule. Cu ajutorul unui exponent $p \geqslant 1$ se poate face generalizarea la convergenţa în spaţiul Banach L^p al funcţiilor măsurabile, pentru care puterea p a modulului este integrabilă, reduse modulo funcţiile aproape peste tot nule. Pentru discuţii mai ample a se vedea [16], [18], [29] şi [32].

***) Dacă (*iii*) este înlocuită cu convergenţa în L^p, tipul necesar de convergenţă dominată este dat de $|f_n(x)| \leqslant |g(x)|$, unde $g\in L^p$.

Scanned with OKEN Scanner

Aceasta înseamnă că are loc convergența aproape peste tot și există o funcție g, integrabilă Lebesgue, astfel încît $|f_n(x)| \leqslant |g(x)|$ pentru $n = 1, 2, \ldots$ și aproape orice $x \in S$.

Să formulăm mai întîi două propoziții referitoare la implicațiile între (i)—(iv). Dacă S are măsura finită, atunci

$$(iv) \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} (i) \\ (iii) \end{matrix} \right\} \Rightarrow (ii).$$

Dacă S are măsura infinită, atunci

$$(iv) \Rightarrow \begin{cases} (i) \\ (iii) \Rightarrow (ii). \end{cases}$$

(Vezi [18], [30] și [32].)

Vom da acum exemple care ilustrează că toate celelalte implicații, cu excepția celor indicate mai sus, nu au loc. Toate aceste exemple, în afară de ultimul, ilustrează cazul unor spații cu măsură finită sau infinită, deoarece toate funcțiile implicate sînt nule pentru $x \in \boldsymbol{R} \setminus [0, 1]$.

$(i) \not\Rightarrow (iii)$. Fie $f(x) = 0$ pentru orice $x \in \boldsymbol{R}$,

$$f_n(x) = \begin{cases} n, \text{ dacă } 0 < x < \frac{1}{n}, \\ 0, \text{ dacă } x \in \boldsymbol{R} \setminus \left(0, \frac{1}{n}\right), \end{cases}$$

pentru $n = 1, 2, \ldots$.

$(i) \not\Rightarrow (iv)$. La fel ca pentru $(i) \not\Rightarrow (iii)$, deoarece $(iv) \Rightarrow (iii)$.

$(iii) \not\Rightarrow (i)$. Fie $f(x) = 0$ pentru orice $x \in \boldsymbol{R}$. Pentru orice $n \in \boldsymbol{N}$ să scriem $n = 2^k + m$, unde $0 \leqslant m < 2^k, k = 0, 1, 2, \ldots$; atunci k și m sînt unic determinate de n. Fie

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, \text{ dacă } \frac{m}{2^k} \leqslant x \leqslant \frac{m+1}{2^k}, \\ 0, \text{ dacă } x \in \boldsymbol{R} \text{ și nu verifică inegalitățile de mai sus.} \end{cases}$$

Atunci $\int_S |f_n(x) - f(x)| \, dx = 2^{-k} \to 0$ cînd $n \to +\infty$, dar $\lim_{n \to \infty} f_n(x)$ nu există pentru nici un $x \in [0,1]$.

Scanned with OKEN Scanner

$(iii) \not\Rightarrow (iv)$. La fel ca pentru $(iii) \not\Rightarrow (i)$, deoarece $(iv) \Rightarrow (i)$.
$(ii) \not\Rightarrow (i)$. La fel ca pentru $(iii) \not\Rightarrow (i)$, deoarece pentru funcția f_n din acel exemplu și orice ε pozitiv, avem

$$\mu\{x \mid |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\} \leqslant 2^{-k} \to 0 \text{ cînd } n \to +\infty.$$

$(ii) \not\Rightarrow (iii)$. Fie $f(x) = 0$ pentru orice $x \in \boldsymbol{R}$ și pentru orice $n \in \boldsymbol{N}$, fie k și m determinate ca în exemplul pentru $(iii) \not\Rightarrow (i)$. Fie

$$f_n(x) = \begin{cases} 2^k, \text{ dacă } \dfrac{m}{2^k} \leqslant x \leqslant \dfrac{m+1}{2^k}, \\ 0, \text{ dacă } x \in \boldsymbol{R} \text{ și nu verifică inegalitățile de mai sus.} \end{cases}$$

Atunci pentru orice număr pozitiv ε,

$$\mu\{x \mid |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\} \leqslant 2^{-k} \to 0 \text{ cînd } n \to +\infty,$$

dar

$$\int_S |f_n(x) - f(x)| \, dx = 1 \not\to 0 \text{ cînd } n \to +\infty.$$

$(ii) \not\Rightarrow (iv)$. La fel ca la $(ii) \not\Rightarrow (i)$ sau $(ii) \not\Rightarrow (iii)$, deoarece $(iv) \Rightarrow (i)$ și $(iv) \Rightarrow (iii)$.
În sfîrșit, să dăm un exemplu în care spațiul S este spațiul $\boldsymbol{R}$ cu măsura infinită:
$(i) \not\Rightarrow (ii)$. Fie $f(x) = 0$ pentru orice $x \in \boldsymbol{R}$ și

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, \text{ dacă } n \leqslant x \leqslant n+1, \\ 0, \text{ pentru ceilalți } x \in \boldsymbol{R}. \end{cases}$$

41. Două măsuri μ și ν pe un spațiu măsurabil $(X, \mathbf{S})$ cu proprietatea că μ este absolut continuă în raport cu ν și pentru care nu există nici o funcție f astfel ca $\mu(E) = \int_E f(x) \, d\nu(x)$ pentru orice $E \in \mathbf{S}$.

Fie $X = \boldsymbol{R}$ și fie $\mathbf{S}$ clasa tuturor submulțimilor din X. Pentru orice mulțime $E \in \mathbf{S}$ să definim

$$\mu(E) = \begin{cases} 0, \text{ dacă } E \text{ este numerabilă}, \\ +\infty, \text{ dacă } E \text{ nu este numerabilă}, \end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

$$\nu(E) = \begin{cases} n, \text{ dacă } E \text{ este formată din } n \text{ puncte, } n \geqslant 0, \\ +\infty, \text{ dacă } E \text{ este infinită.} \end{cases}$$

Atunci $\nu(E) = 0 \Rightarrow E = \emptyset$, de unde $\mu(E) = 0$; aşadar μ este absolut continuă în raport cu ν. Pe de altă parte, dacă f este o funcţie cu proprietatea că

$$\mu(E) = \int_E f(x)\, d\nu(x)$$

pentru orice mulţime E, atunci această egalitate este adevărată, în particular, şi atunci cînd E este o mulţime oarecare formată dintr-un singur punct, $E = \{y\}$. În acest caz,

$$\mu(E) = 0 = \int_E f(x)\, d\nu(x) = f(y).$$

Aceasta înseamnă că funcţia f este identic nulă şi, în consecinţă, $\mu(E) = 0$ pentru orice $E \in \mathbf{S}$. (Contradicţie.)

Dacă interpretăm produsul $\pm\infty \cdot 0$ ca fiind egal cu 0, este adevărată următoarea propoziţie: *Dacă f este o funcţie nenegativă, extinsă, cu valori reale, măsurabilă în raport cu o măsură ν pe un spaţiu cu măsură $(X, \mathbf{S})$ şi dacă*

$$\mu(E) = \int_E f(x)\, d\nu(x)$$

pentru toate mulţimile măsurabile E, atunci μ este o măsură pe $(X, \mathbf{S})$, absolut continuă în raport cu ν. Contraexemplul precedent arată că reciproca fără restricţii este falsă. Teorema Radon-Nikodym (a se vedea [18]) este o variantă cu restricţie a reciprocei.

Scanned with OKEN Scanner

Scanned with OKEN Scanner

Partea a doua

Mai multe dimensiuni

Capitolul 9

Funcţii de două variabile

Introducere

În acest capitol vom presupune că cititorul este familiarizat cu noţiunile de continuitate şi diferenţiabilitate pentru funcţiile de două variabile, şi — pentru ultimele două exemple — cu integralele curbilinii, conexiunea simplă şi analiza vectorială. Dacă $f(x, y)$ este o funcţie diferenţiabilă de două variabile x şi y, derivatele ei parţiale le vom nota alternativ prin:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x(x, y) = f_1(x, y), \quad \frac{\partial f}{\partial y} = f_y(x, y) = f_2(x, y),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}(x, y) = f_{11}(x, y), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{xy}(x, y) = f_{12}(x, y), \ldots$$

O **regiune** este o mulţime deschisă, nevidă R cu proprietatea că oricare pereche de puncte ale sale pot fi unite printr-o linie frîntă conţinută în întregime în R.

1. O funcţie discontinuă de două variabile, separat continuă în raport cu fiecare variabilă.

Să definim funcţia $f(x, y)$, cu domeniul $\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}$, prin:

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}, & \text{dacă } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{dacă } x = y = 0. \end{cases}$$

Atunci f este discontinuă în origine, dat fiind că oricît de aproape de originea (0,0) există un punct de forma (a, a) în care f are valoarea $1/2$. Pe de altă parte, pentru orice valoare dată a lui y (nulă sau nenulă), funcția $g(x) = f(x, y)$ este o funcție continuă peste tot în raport cu x. Din motive similare, $f(x, y)$ este o funcție continuă de y pentru orice valoare dată a lui x.

2. O funcție de două variabile care nu are limită în origine, dar care tinde spre zero de-a lungul oricărei drepte.
Fie funcția $f(x, y)$, cu domeniul $\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}$, definită în modul următor:

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2}, & \text{dacă } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{dacă } x = y = 0, \end{cases}$$

și fie L o dreaptă oarecare care trece prin origine. Dacă L este una din axele de coordonate, atunci $f(x, y)$ este identic nulă pe L și deci are limita zero atunci cînd $(x, y) \to (0,0)$ de-a lungul lui L. Dacă L este dreapta $y = mx$, atunci f are pe L valoarea

$$f(x, mx) = \frac{mx^3}{x^4 + m^2x^2} = \frac{mx}{x^2 + m^2}$$

pentru $x \neq 0$. Prin urmare, $\lim\limits_{x\to 0} f(x, mx) = 0$. Cu toate acestea, $f(x, y)$ este discontinuă în (0,0), deoarece oricît de aproape de (0,0) există puncte de forma (a, a^2), în care f are valoarea $1/2$.

3. O rafinare a exemplului precedent.
Fie funcția $f(x, y)$, cu domeniul $\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}$, definită în modul următor:

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{e^{-1/x^2} y}{e^{-2/x^2} + y^2}, & \text{dacă } x \neq 0, \\ 0, & \text{dacă } x = 0, \end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

și fie C o curbă arbitrară, care trece prin origine, de forma $x^m = (y/c)^n$, adică $y = cx^{m/n}$, unde m și n sînt numere întregi, pozitive, relativ prime, iar c este o constantă nenulă ($x \geqslant 0$, dacă n este par). Atunci, dacă punctul (x,y) se apropie de (0,0) de-a lungul lui C, obținem

$$\lim_{x\to 0} f(x, cx^{m/n}) = \lim_{x\to 0} \frac{c\,e^{-1/x^2}x^{-m/n}}{e^{-2/x^2}x^{-2m/n} + c^2} = 0$$

(a se vedea Capitolul 3, Exemplul 10). Deși limita lui $f(x, y)$, cînd (x,y) se apropie de origine pe o curbă algebrică arbitrară de tipul $y = cx^{m/n}$, este nulă, funcția $f(x, y)$ este discontinuă în $(0, 0)$, deoarece există puncte de forma $(a, e^{-1/a^2})$, oricît de aproape de (0,0), în care f ia valoarea $1/2$.

4. O funcție discontinuă (și deci nediferențiabilă) de două variabile care are peste tot derivate parțiale de ordinul întîi.

Oricare din funcțiile din cele trei exemple precedente are aceste proprietăți.

5. Funcții f pentru care există și sînt egale numai două din următoarele limite:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y), \qquad \lim_{x\to a}\lim_{y\to b} f(x, y), \qquad \lim_{y\to b}\lim_{x\to a} f(x, y).$$

Să notăm respectiv cu (i), (ii) și (iii) cele trei limite de mai sus. Următoarele funcții au proprietatea că limita indicată nu există, dar celelalte două există și sînt egale.

(i) Exemplul 1, unde $(a, b) = (0,0)$.

$$(ii)\ f(x, y) = \begin{cases} y + x\sin\left(\dfrac{1}{y}\right), & \text{dacă } y \neq 0, \\ 0, & \text{dacă } y = 0, \end{cases}$$

cu $(a, b) = (0,0)$.

Scanned with OKEN Scanner

$$(iii)\ f(x, y) = \begin{cases} x + y \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{dacă } x \neq 0 \\ 0, & \text{dacă } x = 0, \end{cases}$$

cu $(a, b) = (0,0)$.

În exemplele (ii) și (iii) avem

$$|f(x, y)| \leqslant |x| + |y| \leqslant 2(x^2 + y^2)^{1/2}$$

de unde $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0$. Oricare din limitele iterate, (ii) sau (iii) care există, este egală cu 0.

Trebuie observat că dacă ambele limite (i) și (ii) există, ele trebuie să fie egale. Același lucru este valabil și pentru limitele (i) și (iii). (Vezi [34], p.184.)

6. Funcţii f pentru care există numai una din următoarele limite:

$$\lim_{(x, y)\to(a, b)} f(x, y),\ \lim_{x\to a} \lim_{y\to b} f(x, y),\ \lim_{y\to b} \lim_{x\to a} f(x, y).$$

Ca și în Exemplul 5, să notăm limitele de mai sus respectiv cu (i), (ii) și (iii). Funcţiile următoare au proprietatea că limitele indicate există, în timp ce cele omise nu există

$$(i)\ f(x, y) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{y}\right) + y \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{dacă } xy \neq 0 \\ 0, & \text{dacă } xy = 0, \end{cases}$$

cu $(a, b) = (0,0)$.

$$(ii)\ f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} + y \sin\frac{1}{x}, & \text{dacă } x \neq 0 \\ 0, & \text{dacă } x = 0, \end{cases}$$

cu $(a, b) = (0, 0)$.

Scanned with OKEN Scanner

$$(iii)\ f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}+x\sin\dfrac{1}{y}, & \text{dacă } y\neq 0\\ 0, & \text{dacă } y=0,\end{cases}$$

cu $(a,b)=(0,0)$.

7. O funcție f pentru care $\lim\limits_{x\to a}\lim\limits_{y\to b} f(x,y)$ și $\lim\limits_{y\to b}\lim\limits_{x\to a} f(x,y)$ există și nu sînt egale.

$$\text{Dacă } f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & \text{dacă } x^2+y^2\neq 0\\ 0, & \text{dacă } x=y=0,\end{cases}$$

atunci

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y)=\lim_{x\to 0}(x^2/x^2)=1,$$

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y)=\lim_{y\to 0}(-y^2/y^2)=-1.$$

8. O funcție $f(x,y)$ pentru care $\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)=g(x)$ există uniform în raport cu x, $\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)=h(y)$ există uniform în raport cu y, $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=\lim\limits_{y\to 0} h(y)$, dar $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ nu există.

Fie

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & \text{dacă } xy\neq 0,\\ 0, & \text{dacă } xy=0.\end{cases}$$

Atunci

$$g(x)=\lim_{y\to 0} f(x,y)=\begin{cases}1, & \text{dacă } x\neq 0,\\ 0, & \text{dacă } x=0,\end{cases}$$

$$h(y)=\lim_{x\to 0} f(x,y)=\begin{cases}1, & \text{dacă } y\neq 0,\\ 0, & \text{dacă } y=0,\end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

și ambele limite sînt uniforme pe toată mulțimea numerelor reale. Totuși, dat fiind că există puncte oricît de apropiate de (0,0) în care f este egală cu 0, și puncte oricît de apropiate de (0,0), în care f este egală cu 1, limita lui $f(x, y)$ cînd $(x, y) \to (0,0)$ nu poate să existe.

Trebuie observat că, prin teorema Moore-Osgood (a se vedea[36], p.313), contraexemplul de față nu este posibil dacă toate punctele de forma $(0,y)$ și toate punctele de forma $(x,0)$ sînt excluse din domeniul lui f.

9. O funcție diferențiabilă de două variabile, care nu este continuu diferențiabilă.

Dacă

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) + y^2 \sin\left(\frac{1}{y}\right), & \text{dacă } xy \neq 0, \\ x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{dacă } x \neq 0 \text{ și } y = 0, \\ y^2 \sin\left(\frac{1}{y}\right), & \text{dacă } x = 0 \text{ și } y \neq 0, \\ 0, & \text{dacă } x = y = 0, \end{cases}$$

atunci funcțiile

$$f_x(x, y) = \begin{cases} 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right), & \text{dacă } x \neq 0, \\ 0, & \text{dacă } x = 0, \end{cases}$$

$$f_y(x, y) = \begin{cases} 2y \sin\left(\frac{1}{y}\right) - \cos\left(\frac{1}{y}\right), & \text{dacă } y \neq 0, \\ 0, & \text{dacă } y = 0 \end{cases}$$

sînt discontinue în origine și deci f nu este continuu diferențiabilă în origine. Totuși, f este diferențiabilă peste tot.

Scanned with OKEN Scanner

De exemplu, f este diferențiabilă în $(0,0)$, deoarece pentru $h^2 + k^2 \neq 0$, diferența $f(h, k) - f(0,0)$ poate fi scrisă sub forma

$$f_x(0, 0)\, h + f_y(0, 0)\, k + \varepsilon_1(h, k)\, h + \varepsilon_2(h, k)\, k,$$

unde

$$\lim_{(h, k) \to (0, 0)} \varepsilon_1(h, k) = 0, \quad \lim_{(h, k) \to (0,0)} \varepsilon_2(h, k) = 0.$$

Într-adevăr, această reprezentare ia forma particulară

$$f(h, k) - f(0,0) = \begin{cases} \left(h \sin \frac{1}{h}\right) h + \left(k \sin \frac{1}{k}\right) k, \text{ dacă, } hk \neq 0, \\ \left(h \sin \frac{1}{h}\right) h + 0 \cdot k, \text{ dacă } h \neq 0 \text{ și } k = 0, \\ 0 \cdot h + \left(k \sin \frac{1}{k}\right) k, \text{ dacă } h = 0 \text{ și } k \neq 0. \end{cases}$$

10. O funcție diferențiabilă ale cărei derivate parțiale mixte de ordinul doi nu sînt egale.

Dacă

$$f(x, y) = \begin{cases} xy\, \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, \text{ dacă } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, \quad \text{dacă } x = y = 0, \end{cases}$$

atunci

$$f_y(x, 0) = \begin{cases} x, \text{ dacă } x \neq 0, \\ \lim\limits_{k \to 0} \dfrac{f(0, k)}{k} = 0, \text{ dacă } x = 0, \end{cases}$$

$$f_x(0, y) = \begin{cases} -y, \text{ dacă } y \neq 0 \\ \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(h, 0)}{h} = 0, \text{ dacă } y = 0, \end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

și deci, în origine,

$$f_{xy}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f_y(h,0) - f_y(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = 1,$$

$$f_{yx}(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f_x(0,k) - f_x(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{-k}{k} = -1.$$

Funcția f este continuu diferențiabilă, deoarece atît $\partial f/\partial x$ cît și $\partial f/\partial y$ sînt continue peste tot. În particular, $\partial f/\partial x$ este continuă în origine, deoarece pentru $x^2+y^2 \neq 0$, avem

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| = \frac{|x^4y + 4x^2y^3 - y^5|}{(x^2+y^2)^2} \leqslant \frac{6(x^2+y^2)^{5/2}}{(x^2+y^2)^2} = 6(x^2+y^2)^{1/2}.$$

Acest exemplu este imposibil în cazul *continuității* derivatelor parțiale mixte f_{xy} și f_{yx} într-o vecinătate a originii. De fapt (a se vedea [34], p.263), *dacă f, f_x și f_y există într-o regiune R și dacă f_{xy}* (sau f_{yx}) *există și este continuă în orice punct (a,b) al lui R, atunci f_{yx}* (resp. f_{xy}) *există în (a,b) și, în acest punct, $f_{xy} = f_{yx}$.*

11. O funcție f continuu diferențiabilă de două variabile x și y și o regiune plană R cu proprietatea că $\partial f/\partial y$ se anulează identic în R, dar f nu este independentă de y în R.

Fie L raza (semidreaptă închisă) din $\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}$;

$$L = \{(x,y) \mid x \geqslant 0, y = 0\},$$

și fie R regiunea $(\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R})\setminus L$. Funcția

$$f(x,y) = \begin{cases} x^3, \text{ dacă } x > 0 \text{ și } y > 0, \\ 0 \text{ în celelalte cazuri, cînd } (x,y) \in R, \end{cases}$$

este continuu diferențiabilă în R și are, de fapt, derivate parțiale de ordinul doi continue. (Dacă înlocuim pe x^3 cu e^{-1/x^2}, f are derivate parțiale continue de orice ordin). Deși prima derivată parțială $f_2(x,y)$ a lui f în raport cu y se anulează identic în R, funcția f *nu* este independentă de y; de exemplu, $f(1,1) = 1$ și $f(1,-1) = 0$. Se poate demonstra

Scanned with OKEN Scanner

că o funcție f, care are derivate parțiale de ordinul întîi identic nule într-o regiune R, este constantă în R. (Vezi [34], p.280.) Exemplul de față arată că următorul raționament pentru demonstrarea acestui fapt ar fi eronat: „Deoarece $\partial f/\partial x = 0$, f nu depinde de x; deoarece $\partial f/\partial y = 0$, f nu depinde de y; deci f nu depinde nici de x, nici de y și este o constantă". Dacă intersecția unei regiuni R cu orice dreaptă paralelă cu axa y este un interval, contraexemplul acesta nu mai este posibil. (Vezi [34], p.288, Ex. 32.)

12. O funcție neomogenă, continuu diferențiabilă, de două variabile, local omogenă.

O funcție $f(x, y)$ este **omogenă** de grad n într-o regiune R, dacă și numai dacă pentru toți x,y și orice λ pozitiv pentru care atît (x,y) cît și $(\lambda x, \lambda y)$ sînt în R, $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y)$. O funcție $f(x, y)$ este **local omogenă** și de grad n într-o regiune R, dacă și numai dacă f este omogenă și de grad n într-o vecinătate a fiecărui punct al lui R.

Fie L raza (semidreaptă închisă) din $\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}$:

$$L = \{(x, y) \mid x = 2, y \geqslant 0\},$$

și fie R regiunea $(\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}) \setminus L$. Funcția

$$f(x, y) = \begin{cases} y^4/x, \text{ dacă } x > 2 \text{ și } y > 0, \\ y^3, \text{ în celelalte cazuri cînd } (x, y) \in R, \end{cases}$$

este continuu diferențiabilă în R (de fapt, f are derivate parțiale de ordinul doi continue). Deoarece, pentru λ apropiat de 1 și pentru orice $(x, y) \in R$, $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^3 f(x, y)$, f este local omogenă de grad 3 în R. Totuși f nu este omogenă de grad 3 în R deoarece pentru $(x,y) = (1,2)$ și $\lambda = 4$, $f(x, y) = 8$ și $f(4x, 4y) = f(4,8) = 1024 \neq 4^3 \cdot 8$. Funcția f nu este omogenă de grad n pentru nici un $n \neq 3$, deoarece ar fi și local omogenă de grad n, ceea ce, evident, este imposibil.

Scanned with OKEN Scanner

13. O funcție diferențiabilă de două variabile, care nu are extremum în origine, dar a cărei restricție la orice dreaptă care trece prin origine are în acest punct un minim relativ strict.

Funcția

$$f(x, y) = (y - x^2)(y - 3x^2)$$

nu are extremum relativ în origine, deoarece există puncte de forma $(0,b)$ oricît de apropiate de origine și în care f este pozitivă; de asemenea, oricît de aproape de origine există și puncte de forma $(a, 2a^2)$, în care f este negativă. Dacă domeniul lui f este restrîns la axa x, atunci restricția $3x^4$ a lui f are un minim absolut strict în $x = 0$. Dacă domeniul lui f este restrîns la axa y, restricția corespunzătoare y^2 are un minim absolut strict în $y = 0$. În sfîrșit, dacă domeniul lui f este restrîns la dreapta $y = mx$, care trece prin origine, cu $0 < |m| < +\infty$, funcția restrînsă de parametrul x:

$$g(x) = f(x, mx) = (mx - x^2)(mx - 3x^2) = m^2x^2 - 4mx^3 + 3x^4$$

are un minim relativ strict în origine, deoarece $g'(0) = 0$ și $g''(0) = 2m^2 > 0$.

14. O rafinare a exemplului precedent.

Funcția

$$f(x, y) = \begin{cases} (y - e^{-1/x^2})(y - 3e^{-1/x^2}), & \text{dacă } x \neq 0 \\ y^2, & \text{dacă } x = 0, \end{cases}$$

nu are extremum relativ în origine (a se vedea Exemplul 13), dar dacă domeniul lui f este restrîns la curba algebrică $y = cx^{m/n}$, unde m și n sînt numere întregi, relativ prime

Scanned with OKEN Scanner

și pozitive, iar c este o constantă nenulă ($x \geqslant 0$ cînd n este par), funcția restrînsă, de parametrul x:

$$g(x) = f(x, cx^{m/n}) = (cx^{m/n} - e^{-1/x^2})(cx^{m/n} - 3e^{-1/x^2}) =$$

$$= x^{2m/n}[c^2 - 4c\, e^{-1/x^2} x^{m/n} + 3\, e^{-2/x^2} x^{-2m/n}]$$

are un minim relativ strict în $x = 0$. Afirmația este adevărată deoarece factorul $x^{2m/n}$ este pozitiv pentru $x \neq 0$, în timp ce funcția dintre paranteze are limita pozitivă c^2 cînd $x \to 0$.

15. O funcție f pentru care $\frac{d}{dx}\int_a^b f(x, y)\, dy \neq \int_a^b \left[\frac{\partial}{\partial x} f(x, y)\right] dy$, deși fiecare integrală este proprie.

Funcția

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{y^2} e^{-x^2/y}, & \text{dacă } y > 0, \\ 0, & \text{dacă } y = 0, \end{cases}$$

al cărei domeniu este semiplanul superior închis $y \geqslant 0$, este o funcție continuă de x pentru orice valoare fixată a lui y și este o funcție continuă de y pentru orice valoare fixată a lui x, deși ca funcție de cele două variabile x și y este discontinuă în (0,0) (fie $y = x^2$). Prin integrare, obținem

$$g(x) = \int_0^1 f(x, y)\, dy = x\, e^{-x^2}$$

pentru orice număr real x (inclusiv $x = 0$), și, deci $g'(x) = e^{-x^2}(1 - 2x^2)$ pentru orice număr real x (inclusiv $x = 0$). Pentru $x \neq 0$,

$$\int_0^1 f_1(x, y)\, dy = \int_0^1 e^{-x^2/y} \left(\frac{3x^2}{y^2} - \frac{2x^4}{y^3}\right) dy = e^{-x^2}(1 - 2x^2),$$

în timp ce, pentru $x = 0$, deoarece $f_1(0,y) = 0$ pentru orice y (inclusiv $y = 0$),

Scanned with OKEN Scanner

avem

$$\int_0^1 f_1(0, y)\, dy = \int_0^1 0\, dy = 0.$$

Deci

$$g'(0) = 1 \neq \int_0^1 f_1(0, y)\, dy = 0.$$

Oricare din integralele evaluate mai sus este integrală proprie, deoarece în fiecare caz integrandul este o funcție continuă de variabila de integrare.

16. O funcție f pentru care $\int_0^1\int_0^1 f(x, y)\, dy\, dx \neq \int_0^1\int_0^1 f(x, y)\, dx\, dy$, deși fiecare integrală este proprie.

Fie

$$f(x, y) = \begin{cases} y^{-2}, \text{ dacă } 0 < x < y < 1, \\ -x^{-2}, \text{ dacă } 0 < y < x < 1, \\ 0, \text{ în celelalte cazuri cînd } 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1. \end{cases}$$

Pentru $0 < y < 1$, avem

$$\int_0^1 f(x, y)\, dx = \int_0^y \frac{dx}{y^2} - \int_y^1 \frac{dx}{x^2} = 1,$$

și deci

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x, y)\, dx\, dy = \int_0^1 1\, dy = 1.$$

În mod similar, pentru $0 < x < 1$, avem

$$\int_0^1 f(x, y)\, dy = -\int_0^x \frac{dy}{x^2} + \int_x^1 \frac{dy}{y^2} = -1$$

și prin urmare

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x, y)\, dy\, dx = \int_0^1 (-1)\, dx = -1.$$

Scanned with OKEN Scanner

17. O serie dublă $\sum_{m,n} a_{mn}$ pentru care $\sum_m \sum_n a_{mn} \neq \sum_n \sum_m a_{mn}$, deși seriile sînt convergente.

Fie (a_{mn}) matricea infinită, în care m indică numărul liniei, iar n indică numărul coloanei (a se vedea Capitolul 6, Exemplul 20):

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} & \frac{1}{32}\cdots \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{16}\cdots \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8}\cdots \\ -\frac{1}{8} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \end{pmatrix}.$$

Atunci

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_{mn} = 2^{-m} + 2^{-m-1} + \ldots = 2^{-m+1}, \quad m = 1, 2, \ldots,$$

și deci

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} a_{mn} = 1 + 2^{-1} + 2^{-2} + \ldots = 2.$$

În mod similar,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=1}^{+\infty} a_{mn} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-2^{-n+1}) = -2.$$

(Vezi [14], p. 109)

18. O diferențială $P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$ și o regiune plană R în care $P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$ este local exactă, dar nu exactă.

Expresia

$$P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y,$$

Scanned with OKEN Scanner

în care P și Q sînt continue într-o regiune R din $\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}$, se numește **diferențială (totală) exactă** în R, dacă și numai dacă există o funcție diferențiabilă φ, definită pe R astfel încît

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = P, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = Q$$

în R. Expresia $P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$ este **local exactă** într-o regiune R, dacă și numai dacă este exactă într-o vecinătate a fiecărui punct din R. Condiția necesară și suficientă ca $P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$ să fie diferențială totală exactă într-o regiune R este ca pentru orice curbă C, închisă și netedă pe porțiuni, situată în R, integrala curbilinie a lui $P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$ să se anuleze:

$$\int_C P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = 0.$$

(Vezi [34], p.587.) O condiție necesară și suficientă pentru ca $P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$, unde P și Q sînt continuu diferențiabile, să fie local exactă într-o regiune R este ca în orice punct din R să aibă loc egalitatea

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Expresia

$$P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = -\frac{y}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x + \frac{x}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y$$

este local exactă în „planul punctat"

$$R = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 > 0\},$$

deoarece

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2},$$

dacă $x^2 + y^2 > 0$. Pe de altă parte, $P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$ nu este exactă în R. Într-adevăr, dacă C este cercul unitate $x =$

Scanned with OKEN Scanner

$= \cos\theta$, $y = \sin\theta$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, atunci, cu θ ca parametru

$$\int_c P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi} [(-\sin\theta)(-\sin\theta) + \cos^2\theta]\,\mathrm{d}\theta =$$

$$= 2\pi \neq 0.$$

Trebuie remarcat că, dacă R este simplu conex (a se vedea [34], p.598), atunci $P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$ este diferențială totală exactă în R, dacă și numai dacă este local exactă în R. (Vezi [34], p.601.)

19. Un cîmp vectorial solenoidal definit într-o regiune simplu conexă și care nu are potențial vectorial.

Un cîmp vectorial (a se vedea [34], p.568) $P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$, unde P, Q, R sînt funcții continuu diferențiabile într-o regiune W din spațiul euclidean tridimensional, se numește **solenoidal** în W, dacă și numai dacă divergența lui este identic nulă în această regiune:

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0.$$

Dacă un cîmp vectorial $\vec{F}$ este rotorul (a se vedea [34], p.572) unui cîmp vectorial $\vec{G}$ într-o regiune W, atunci cîmpul vectorial $\vec{G}$ se numește **potențial vectorial** al lui $\vec{F}$. Deoarece divergența rotorului este identic nulă (a se vedea [34], p.572), orice cîmp vectorial care are potențial vectorial este un cîmp solenoidal. Reciproca nu este însă adevărată, după cum se poate vedea din exemplul

$$\vec{F} = (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}),$$

pentru regiunea

$$W = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 > 0\}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Prin derivare se poate arăta că $\vec{F}$ este solenoidal:

$$\frac{\partial}{\partial x}\{(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}\,x\}+\frac{\partial}{\partial y}\{(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}y\}+\ldots=$$

$$=(x^2+y^2+z^2)^{-5/2}[(-2x^2+y^2+z^2)+(x^2-2y^2+$$

$$+z^2)+\ldots]=0.$$

Pentru a arăta că $\vec{F}$ nu are potențial vectorial $\vec{G}$ putem considera sfera $x^2+y^2+z^2=1$. Dacă $\vec{n}$ reprezintă vectorul unitate al normalei exterioare a acestei sfere S, atunci integrala de suprafață $\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS$ este egală cu

$$\iint_S (x^2+y^2+z^2)^{-3/2}(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k})\,(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}\cdot$$

$$\cdot(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k})\,dS=\iint_S 1\,dS=4\pi.$$

Dacă însă $\vec{F}$ ar fi fost rotorul unui potențial vectorial, atunci, conform teoremei lui Stokes (a se vedea [34], pp.636—637), integrala de suprafață $\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS$ pe suprafața *închisă* S ar fi fost nulă. Regiunea W este simplu conexă (vezi [34], pp. 639—640).

Proprietatea de conexiune simplă a unei regiuni poate fi gîndită ca posibilitate de a reduce la un punct orice curbă simplă închisă din regiune, fără a părăsi regiunea. În regiunea W din „spațiul punctat" din acest exemplu, orice curbă simplă închisă, care nu trece prin origine, poate fi „strînsă" într-un punct, fără a trece prin origine, deci fără a ieși din W. Caracteristica patologică a regiunii W, care face posibil acest contraexemplu, este imposibilitatea reducerii (strîngerii) suprafețelor sferice — sau „de tip sferă" — la un punct, fără a părăsi pe W.

Capitolul 10

Mulţimi plane

Introducere

În acest capitol vom presupune că cititorul este familiarizat cu elemente de topologie a planului euclidean, inclusiv noţiuni ca mărginire, deschidere, închidere, compacitate, dens şi nicăieri dens. Alte cîteva concepte vor fi definite în paragrafele următoare. În fiecare caz se presupune că spaţiul este planul euclidean E_2.

Distanţa $d(A, B)$ între două mulţimi nevide A şi B este definită prin:

$$d(A, B) = \inf \{d(p, q) \mid p \in A, q \in B\},$$

unde $d(p,q)$ este distanţa dintre punctele $p = (x_1, y_1)$ şi $q = (x_2, y_2)$ şi este dată de formula $[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2]^{1/2}$. Astfel, distanţa dintre două mulţimi este totdeauna nenegativă, este nulă dacă mulţimile au un punct comun şi poate fi nulă dacă mulţimile sînt disjuncte. Dacă mulţimile sînt disjuncte şi *compacte*, distanţa dintre ele este pozitivă. (Vezi [34], p.200, Ex. 17.) **Diametrul** $\delta(A)$ al unei mulţimi nevide A este definit prin:

$$\delta(A) = \sup \{d(p, q) \mid p \in A, q \in A\},$$

este totdeauna nenegativ şi este finit, dacă şi numai dacă A este mărginită. Dacă A este compactă, diametrul ei se realizează ca distanţă între două din punctele ei (vezi [34], p.200, Ex. 18).

Scanned with OKEN Scanner

Un **disc închis** este o mulțime de forma

$$\{(x, y) \mid (x - h)^2 + (y - k)^2 \leqslant r^2\},$$

pentru un punct (h,k) oarecare și un număr pozitiv r. În mod similar se definește un **disc deschis,** inegalitatea în sens larg $\leqslant$ fiind înlocuită cu inegalitatea strictă $<$.

Două mulțimi nevide A și B sînt **separate,** dacă și numai dacă sînt disjuncte și nici una nu conține un punct limită al celeilalte: $A \cap \bar{B} = \bar{A} \cap B = \emptyset$.

O mulțime nevidă E este **conexă,** dacă și numai dacă nu există două mulțimi nevide, separate, A și B, a căror reuniune să fie E. O mulțime care conține mai mult decît un singur punct este **total discontinuă**, dacă și numai dacă singurele ei submulțimi conexe sînt mulțimile formate dintr-un singur punct. O mulțime A este **local conexă**, dacă și numai dacă ori de cîte ori $p \in A$ și N este o vecinătate a lui p, există o subvecinătate M a lui p cu proprietatea că fiecare pereche de puncte ale lui M aparține unei submulțimi conexe a lui N.

Se numește **arc** o aplicație continuă a unui interval închis (care poate fi ales intervalul unitate [0,1]) în E_2, sau domeniul valorilor unei astfel de aplicații. În ultimul caz, cînd arcul este privit ca mulțime de puncte, aplicația se numește **parametrizare** a arcului. Dacă aplicația este $f(t) = (x(t), y(t))$, funcțiile $x(t)$ și $y(t)$ sînt **funcțiile de parametrizare** ale aplicației. Dacă $f(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, este un arc și dacă $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_n = b$, atunci *arcul poligonal* format din segmentele $f(a_0) f(a_1)$, $f(a_1) f(a_2), \ldots, f(a_{n-1}) f(a_n)$ se numește **poligon înscris,** iar marginea superioară a lungimilor tuturor poligoanelor înscrise în arcul dat

$$d(f(a_0), f(a_1)) + d(f(a_1), f(a_2)) + \ldots + d(f(a_{n-1}), f(a_n))$$

se numește **lungime** a arcului. Un arc este **rectificabil,** dacă și numai dacă lungimea lui este finită. Un arc este rectificabil, dacă și numai dacă funcțiile sale de parametrizare sînt funcții cu variație mărginită (vezi [36], p.353, Ex. 27). Un arc $f(t)$, pentru $a \leqslant t \leqslant b$, este o **curbă închisă,** dacă și numai dacă $f(a) = f(b)$.

Scanned with OKEN Scanner

Un arc $f(t)$ se numește **simplu,** dacă și numai dacă este o corespondență biunivocă. În acest caz, inversa ei este tot continuă și aplicația este un homeomorfism (vezi [34], p.240). Dacă $y = g(x)$ este continuă pe $[a,b]$, atunci graficul ei este un arc simplu (cu parametrizarea $x = t$, $y = g(t)$, $t \in [a, b]$).

O **curbă simplă închisă** este un arc $f(t)$ cu proprietatea că dacă domeniul său de definiție este intervalul închis $[a, b]$, atunci $f(t_1) = f(t_2)$, dacă și numai dacă $t_1 = t_2$ sau $\{t_1, t_2\} = \{a, b\}$. Cu alte cuvinte, o curbă simplă închisă este imaginea homeomorfă a unui cerc.

O **regiune** este o mulțime conexă deschisă. **Teorema lui Jordan** afirmă că complementara oricărei curbe simple închise C constă din două regiuni disjuncte, C fiind frontieră pentru fiecare. (A se vedea [33].) O **regiune Jordan** este oricare din cele două regiuni descrise mai sus, pentru o curbă simplă închisă C oarecare. O **regiune nejordaniană** este o regiune care nu este regiune Jordan.

Dacă $\{C_n\}$ este un șir descrescător de mulțimi compacte nevide ($C_n \supset C_{n+1}$, pentru $n = 1,2,...$), atunci există cel puțin un punct care aparține tuturor mulțimilor C_n, $n = 1,2, ...$; cu alte cuvinte, intersecția mulțimilor C_n este nevidă, adică $\bigcap_{n=1}^{+\infty} C_n \neq \emptyset$. (Vezi [34], p.201, Ex. 30.)

O mulțime A este **convexă,** dacă și numai dacă segmentul închis care unește orice pereche de puncte ale lui A este conținut în întregime în A. (Se consideră că o mulțime cu un singur punct este un caz particular de segment închis.) Deoarece orice intersecție de mulțimi convexe este convexă, și deoarece planul însuși este convex, orice mulțime din plan este conținută în „cea mai mică mulțime convexă", care este intersecția tuturor mulțimilor convexe care conțin mulțimea dată. Această cea mai mică mulțime convexă se numește **înfășurătoarea convexă** a mulțimii date. Închiderea ei, numită **închiderea convexă a mulțimii,** este cea mai mică mulțime convexă închisă care o conține (vezi [36], p.332, Ex.39).

O aplicație este **deschisă,** dacă și numai dacă imaginea oricărei mulțimi deschise a domeniului ei este deschisă. O

aplicație este **închisă,** dacă și numai dacă imaginea oricărei mulțimi închise a domeniului ei este închisă.

În exemplele din acest capitol vom presupune din partea cititorului o oarecare familiarizare cu măsura Lebesgue și cu integrarea Lebesgue în plan. În Bibliografie și în Capitolul 8 se găsesc referințe la teoria lui Lebesgue.

1. Două mulțimi închise disjuncte, situate la distanță nulă.

Fie $F_1 = \{(x, y) \mid xy = 1\}$, $F_2 = \{(x, y) \mid y = 0\} =$ axa x. Atunci F_1 și F_2 sînt închise și disjuncte. Pentru orice $\varepsilon > 0$, punctele $(2/\varepsilon, \varepsilon/2)$ din F_1 și $(2/\varepsilon, 0)$ din F_2 sînt situate la distanța $\frac{1}{2}\varepsilon < \varepsilon$.

2. O mulțime plană mărginită, care nu este conținută într-un disc închis minim.

Prin **disc închis minim,** care conține o mulțime plană mărginită dată A, se înțelege un disc închis, ce conține pe A și care este conținut în orice disc închis, care conține pe A. În acest sens, o mulțime oarecare, formată din două puncte, nu este conținută în nici un disc minim. Prin contrast, orice mulțime plană nevidă, mărginită este conținută într-un disc închis de *rază minimă*. Orice mulțime plană nevidă A este conținută într-o mulțime închisă convexă minimă, în sensul că A este conținută într-o mulțime convexă închisă (închiderea ei convexă), care este ea însăși conținută în orice mulțime convexă închisă, care conține pe A. În spațiul unidimensional $\boldsymbol{R}$ orice mulțime nevidă mărginită este conținută într-un interval închis minim.

3. Mulțimi conexe „subțiri", care nu sînt arce simple.

În acest context prin „subțire" înțelegem „nicăieri densă în plan".

Scanned with OKEN Scanner

Primul exemplu: Mulțimea

$$S_1 = \{(x, y) \mid y = \sin(1/x),\ 0 < x \leqslant 1\} \cup \{(0,0)\}$$

nu este un arc simplu, deoarece nu este compactă ($\{0\} \times [-1,1] \subset \bar{S}_1$).

Al doilea exemplu: Dacă S_1 este mulțimea din primul exemplu, fie

$$S_2 = \bar{S}_1 = \{(x, y) \mid y = \sin(1/x),\ 0 < x \leqslant 1\} \cup (\{0\} \times [-1, 1]).$$

Atunci, deși S_2 este compactă, prin înlăturarea unei mulțimi oarecare de puncte din segmentul $\{0\} \times [-1, 1]$, S_2 nu devine neconexă. Se va arăta în Exemplul 11 că mulțimea S_2 din acest exemplu nu este un arc. În Exemplul 24 vom descrie o mulțime conexă în plan, care devine *total* discontinuă prin înlăturarea unui singur punct.

4. Două circuite plane disjuncte conținute într-un pătrat și care unesc ambele perechi de vîrfuri opuse.

În acest exemplu vom înțelege prin „circuit" o mulțime conexă nicăieri densă. Fie pătratul $[-1,1] \times [-1,1]$ și fie circuitele date în modul următor (fig. 7):

$$C_1 = \left\{(x,\ y) \mid y = \frac{7}{8}x - \frac{1}{8},\ -1 \leqslant x \leqslant 0\right\} \cup \left\{(x, y) \mid y = \right.$$

$$\left. = \frac{1}{2}\sin(\pi/2x) + \frac{1}{4},\ 0 < x < 1\right\} \cup \left\{(x, y) \mid x = \right.$$

$$\left. = 1,\ \frac{3}{4} \leqslant y \leqslant 1\right\}.$$

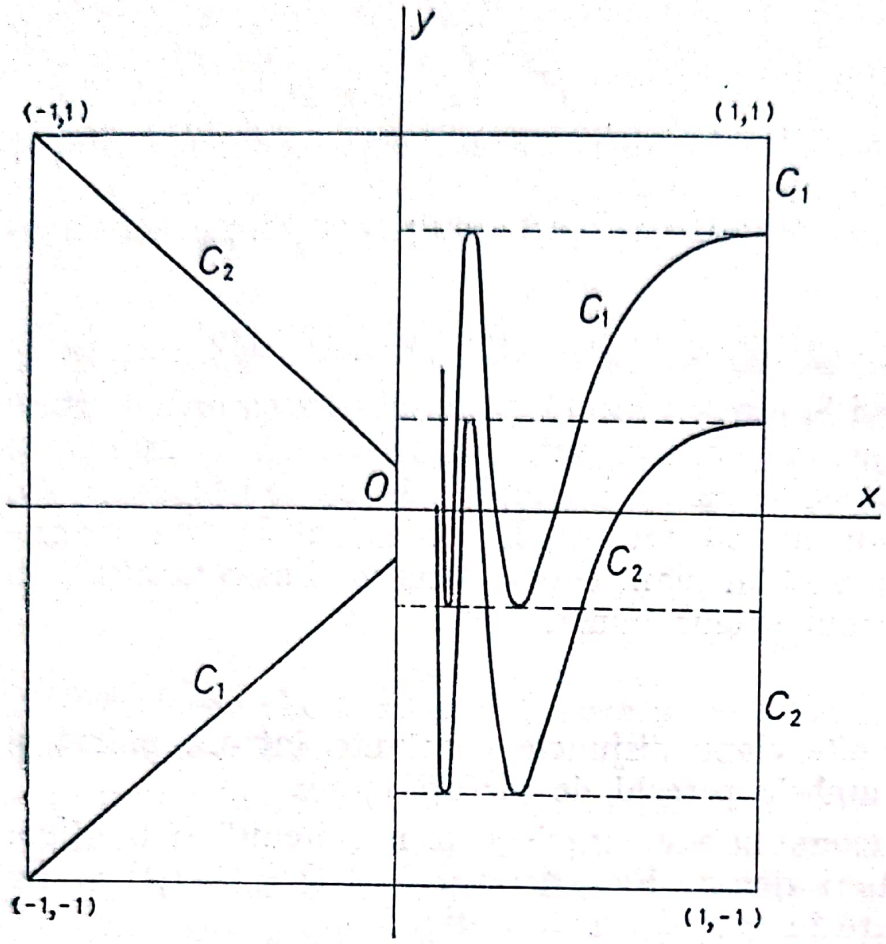
$$C_2 = \left\{(x, y) \mid y = -\frac{7}{8}x + \frac{1}{8},\ -1 \leqslant x \leqslant 0\right\} \cup \left\{(x, y) \mid y = \right.$$

$$\left. = \frac{1}{2}\sin(\pi/2x) - \frac{1}{4},\ 0 < x < 1\right\} \cup \left\{(x, y) \mid x = \right.$$

$$\left. = 1,\ -1 \leqslant y \leqslant \frac{1}{4}\right\}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Fig. 7



Atunci C_1 unește pe $(-1,-1)$ cu $(1,1)$, iar C_2 unește pe $(-1,1)$ cu $(1,-1)$ și $C_1 \cap C_2 = \emptyset$.

5. O aplicație a intervalului $[0,1]$ pe pătratul $[0,1]\times[0,1]$. Dacă $t\in[0,1)$, fie $0, t_1t_2t_3 \ldots$ o dezvoltare binară a lui t și, pentru a evita ambiguitățile, vom presupune că această dezvoltare conține o infinitate de zerouri.

Definim punctul (x,y) din pătratul unitate $S = [0,1] \times [0,1]$, imagine a lui t prin f, prin:

$$x = 0,t_1t_3t_5 \ldots, \quad y = 0,t_2t_4t_6 \ldots .$$

În sfîrșit, să definim $f(1) = (1,1)$. Nu este greu de văzut că f este o aplicație surjectivă, nebiunivocă. De exemplu,

punctul (0,1 ; 0,1) este imaginea a exact trei puncte distincte:

0,11 ; 0,100101010101... și 0,011010101... .

Aplicația f nu este continuă. De exemplu, dacă $\{t_n\}$ este șirul

$$0{,}0011\,;\ 0{,}001111\,;\ 0{,}00111111\,;\ 0{,}0011111111\,;\ \ldots$$

și dacă $(x_n, y_n) = f(t_n)$, atunci șirurile $\{x_n\}$ și $\{y_n\}$ sînt ambele egale cu șirul

$$0{,}01\,;\ 0{,}011\,;\ 0{,}0111\,;\ 0{,}01111\,;\ldots .$$

Însă $t_n \to 0{,}01$ și $(x_n, y_n) \to (0{,}1\,;\ 0{,}1)$, în timp ce $f(0{,}01) = (0{,}0\,;\ 0{,}1) \neq (0{,}1\,;\ 0{,}1)$. Adică, $\lim\limits_{n\to+\infty} f(t_n) \neq f(\lim\limits_{n\to+\infty} t_n)$.

Lăsăm ca exercițiu cititorului să demonstreze că f nu este nici deschisă (imaginea intervalului deschis de la 0,101 la 0,111 conține punctul (0,1 ; 0,1), dar nu îl conține în interior), nici închisă (imaginea intervalului închis de la 0,001 la 0,01 nu conține ca element punctul aderent (0,1 ;0,1)).

6. Un arc plan care umple un pătrat.

Prin **arc care umple spațiul** înțelegem un arc situat într-un spațiu euclidean cu dimensiunea mai mare decît unu și care are un interior nevid în acest spațiu (*nu* este nicăieri dens). Matematicianul italian G. Peano (1858—1932) a stîrnit senzație în lumea matematică cu primul exemplu de arc care umple spațiul. Dăm aici descrierea (dată în 1891 de matematicianul german D. Hilbert (1862—1943)) unui arc care umple pătratul unitate $S = [0,1] \times [0,1]$. În mod similar se pot da exemple analoage multidimensionale.

După cum se arată în fig. 8, ideea constă în a subdiviza pe S și intervalul unitate $I = [0,1]$ în 4^n subpătrate și respectiv subintervale închise, și în a stabili o corespondență între subpătrate și subintervale, cu păstrarea relațiilor de incluziune (la fiecare etapă de subdivizare, dacă un pătrat corespunde

Scanned with OKEN Scanner

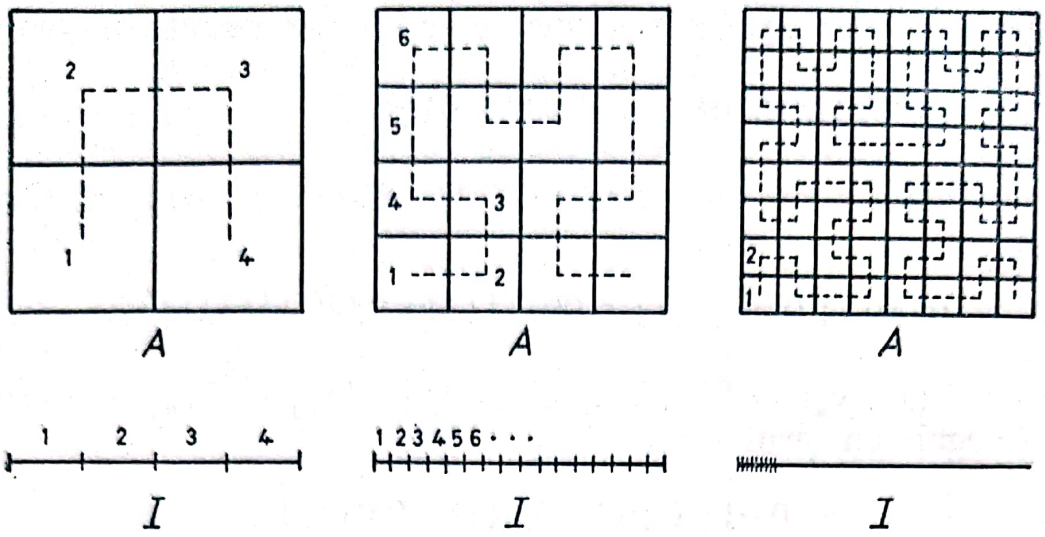


Fig. 8

unui interval, atunci subpătratele lui corespund subintervalelor acestui interval).

Definim acum o aplicație continuă f a lui I pe S: Dacă $x \in I$, atunci, în fiecare etapă de subdivizare, x aparține *cel puțin* unui subinterval închis. Alegem pe oricare din ele (dacă sînt două) și îi asociem pătratul corespunzător. Obținem în acest fel un șir descrescător de pătrate închise, care corespund unui șir descrescător de intervale închise. Acest șir de pătrate închise are proprietatea că există un singur punct care aparține tuturor pătratelor. Prin definiție, acest punct este $f(x)$. Rămîne de arătat: (*i*) punctul $f(x)$ este bine definit, adică independent de orice alegere a intervalelor care conțin pe x; (*ii*) domeniul valorilor lui f este S; (*iii*) f este continuă. Detaliile sînt lăsate pe seama cititorului.

Trebuie observat că în multe puncte aplicația f, pe care tocmai am definit-o, nu este biunivocă. (De exemplu, cele trei puncte $\frac{1}{6}, \frac{1}{2}$ și $\frac{5}{6}$ sînt aplicate, toate, în punctul $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$). Faptul este inevitabil, deoarece, dacă f ar fi biunivocă, ar fi un homeomorfism, în timp ce I și S nu sînt homeomorfe (înlăturarea a trei puncte oarecare transformă pe I într-o mulțime neconexă, în timp ce S rămîne conexă). Faptul

Scanned with OKEN Scanner

că f nu este biunivocă este oarecum paradoxal, deoarece ar părea să spună că I are mai multe puncte decît S!

7. Un arc care umple un pătrat și este situat aproape peste tot într-o mulțime numerabilă.

Dacă φ este funcția lui Cantor din Capitolul 8, Exemplul 15, dacă f este aplicația din Exemplul 6 de mai sus și dacă $g(x) = f(\varphi(x))$, atunci g aplică mulțimea lui Cantor C pe pătratul unitate $[0,1]\times[0,1]$ și mulțimea complementară $[0,1]\setminus C$ pe imaginea prin f a punctelor de forma $m \cdot 2^{-n}$, unde n este un întreg pozitiv, iar m este un întreg pozitiv mai mic decît 2^n.

Acest exemplu poate fi descris și ca un *arc care umple un pătrat, care este staționar aproape peste tot*, sau ca *un arc care umple un pătrat și care este aproape peste tot aproape nicăieri*.

8. Un arc care umple un pătrat și este aproape peste tot diferențiabil.

Prin „aproape peste tot diferențiabil" înțelegem „definit prin funcții de parametrizare care sînt aproape peste tot diferențiabile". Aplicația definită în Exemplul 7 are această proprietate.

9. O aplicație continuă a lui [0,1] pe [0,1], care ia fiecare valoare de o mulțime nenumerabilă de ori.

Această proprietate o are oricare din funcțiile de parametrizare ale arcelor care umplu un pătrat (din Exemplele 6 și 7) și, în general, orice funcție de parametrizare a oricărei aplicații continue a lui [0,1] pe $[0,1]\times[0,1]$. În afară de aceasta, oricare din funcțiile de parametrizare ale aplicației din Exemplul 7 are proprietatea suplimentară de a fi *diferențiabilă aproape peste tot, cu derivata nulă aproape peste tot* (a se vedea [2]).

Scanned with OKEN Scanner

10. Un arc simplu din pătratul unitate, de măsură plană oricît de apropiată de 1.

După cum am văzut în Exemplul 6, nici un arc simplu nu poate umple pătratul unitate $S = [0,1] \times [0,1]$. Conform aceluiași argument, *orice arc simplu din plan este nicăieri dens*. De aici s-ar părea că un arc simplu nu poate ocupa „foarte mult" din S. În particular, nu poate acoperi aproape tot S, deoarece, dacă un arc simplu A din S ar avea măsura 1, el ar fi dens în S și, fiind închis, ar fi egal cu S. Totuși este posibil ca un arc simplu A să aibă măsura plană *pozitivă*. Într-adevăr, dacă ε este orice număr între 0 și 1, există un arc simplu A a cărui măsură plană este mai mare decît $1 - \varepsilon$. Schițăm aici o demonstrație a acestei proprietăți remarcabile.

Procedeul general va consta în modificarea construcției dată în Exemplul 6, prin decuparea unor „canale" deschise între acele subpătrate adiacente ale lui S, care *nu* corespund unor subintervale adiacente ale lui I. După prima etapă „subpătratele" devin *subpatrulatere* care, la rîndul lor, sînt subdivizate prin linii care unesc mijloacele laturilor opuse. În continuare mai sînt decupate alte canale deschise și fiecare patrulater închis se reduce la un șir de *opt* subpatrulatere. În fig. 9 sînt indicate prima subdiviziune și schema generală în care, pentru simplificare, se folosesc pătrate în locul patrulaterelor generale. A doua etapă este redată în fig. 10. În ambele cazuri, canalele decupate sînt indicate hașurat. După n etape există 8^n patrulatere închise, cele numerotate de la $8k - 7$ la $8k$ fiind subpatrulatere ale patrulaterului

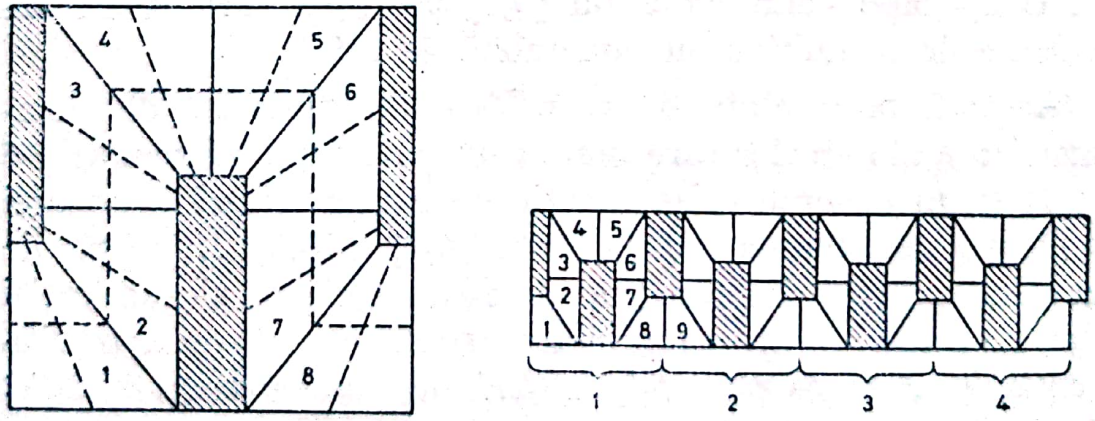


Fig. 9

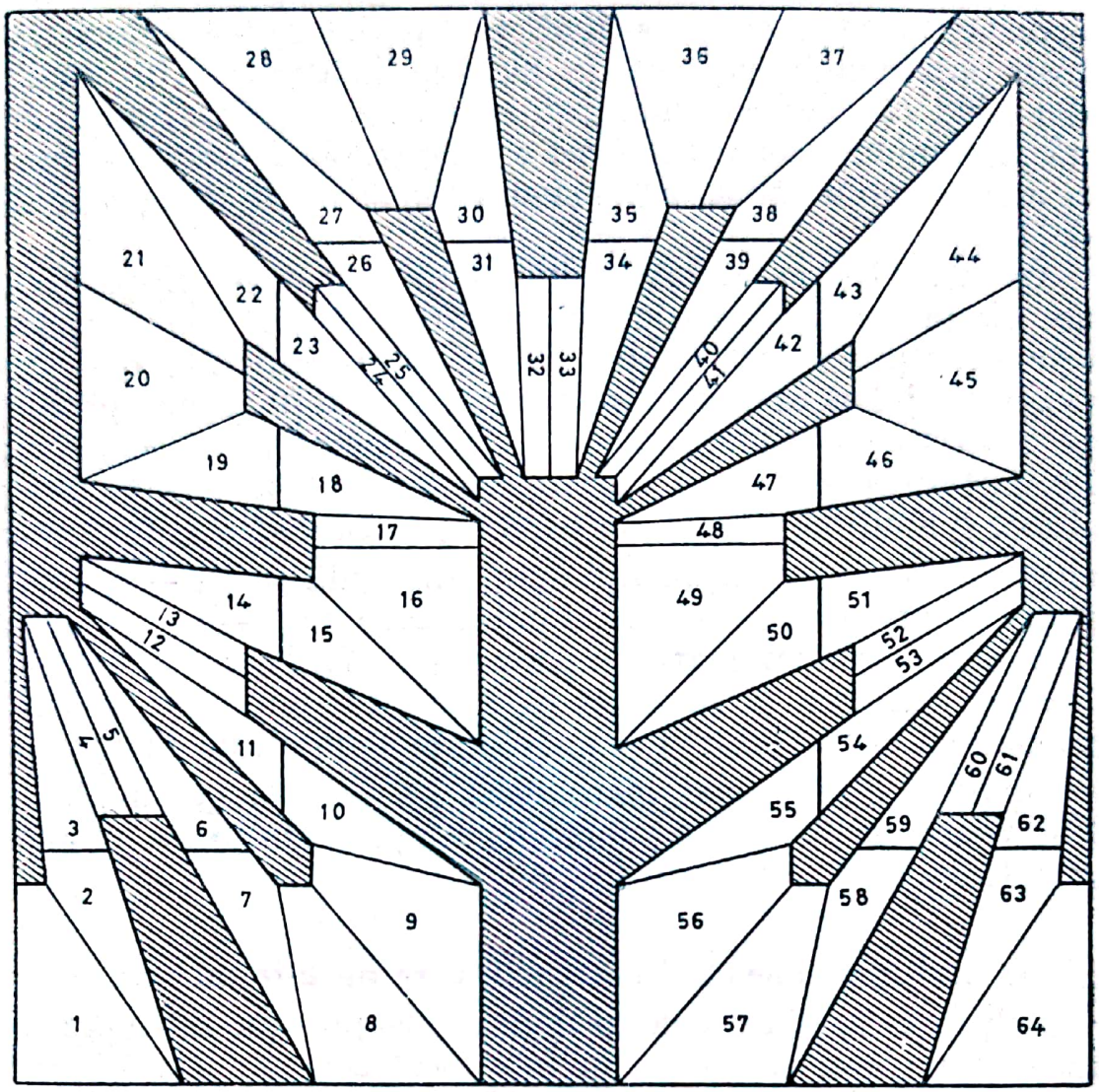


Fig. 10

numerotat cu k în etapa $n-1$ ($k = 1,2,\ldots,8^{n-1}$). Mai departe, în fiecare etapă două patrulatere sînt adiacente, dacă și numai dacă au numere consecutive și deci corespund unor subintervale adiacente ale lui $I = [0,1]$. Nu este greu de demonstrat că diametrul oricărui patrulater este cel mult $\frac{3}{4}$ din diametrul patrulaterului care îl conținea în etapa precedentă. În consecință, orice șir descrescător infinit de patrulatere determină un punct unic de intersecție, iar aplicația este bine definită, ca și în Exemplul 6. Din aceleași motive, ca și în Exemplul 6,

această aplicație este continuă și este biunivocă pentru că toate adiacențele neesențiale au fost înlăturate. În sfîrșit, dat fiind că canalele înlăturate pot avea o arie arbitrar de mică, reuniunea lor poate avea o măsură plană oricît de mică și arcul simplu rămas are măsura plană oricît de apropiată de 1.

În fig. 11 este indicată altă metodă de construire a unui arc simplu cu măsură plană pozitivă. Această construcție este conceptual mai simplă decît cea precedentă, dar are dezavantajul că anumite subintervale ale lui [0,1] sînt aplicate pe mulțimi cu măsura plană nulă. Construcția sugerată în fig. 11 furnizează un arc simplu, care conține pe $A \times A$, unde A este o mulțime Cantor. Deoarece, pentru $0 < \varepsilon \leqslant 1$, putem alege pe A cu măsura (liniară) cel puțin egală cu $\sqrt{1-\varepsilon}$, arcul respectiv are măsura plană cel puțin egală cu $1 - \varepsilon$.

În anul 1903 matematicianul american W.F. Osgood (1864—1943) a construit (a se vedea [37]) un arc simplu cu măsura plană mai mare decît $1 - \varepsilon$, folosind o mulțime Cantor A cu măsura liniară mai mare decît $\sqrt{1-\varepsilon}$. Arcul simplu a fost construit în așa fel încît să conțină mulțimea produs $A \times A$.

11. O mulțime conexă și compactă care nu este un arc.

Mulțimea S_2 din cel de al doilea exemplu din Exemplul 3 nu este un arc, deoarece nu este local conexă: Dacă $N = \left\{(x, y) \mid (x, y) \in S_2,\ x^2 + y^2 < \frac{1}{2}\right\}$, nu există nici o vecinătate a originii care să fie o subvecinătate a lui N, în care oricare două puncte să poată fi unite printr-o mulțime conexă situată în N (a se vedea [17], p.204).

12. O regiune plană, care nu coincide cu interiorul închiderii ei.

Fie $S = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 < 1\} \setminus ([0,1) \times \{0\})$, adică un disc deschis din care a fost exclusă o fantă. Atunci

$$\bar{S} = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\},$$

și interiorul lui $\bar{S}$ este $I(\bar{S}) = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$.

Scanned with OKEN Scanner

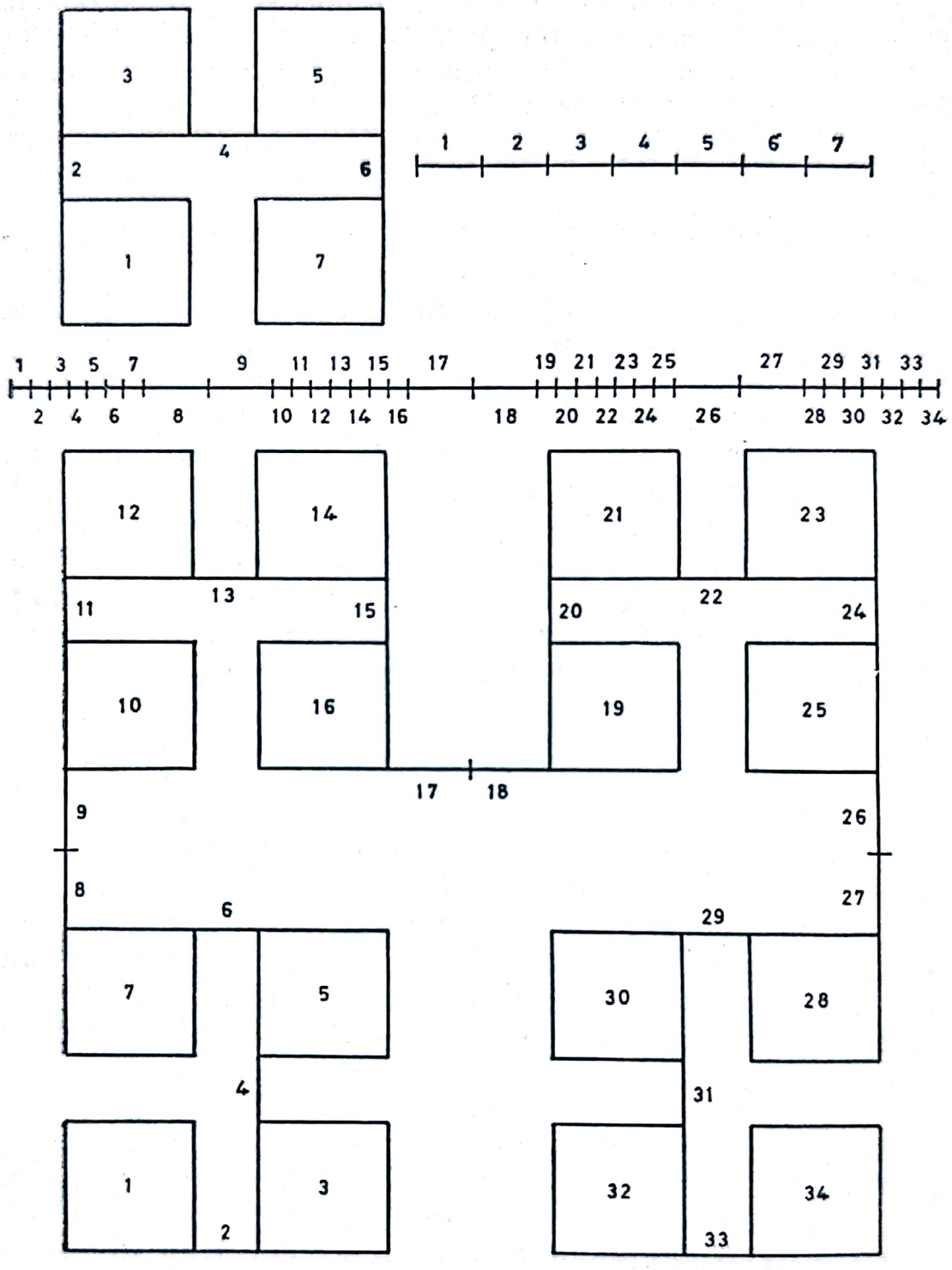

3
5
4
2
6
1
7
1 2 3 4 5 6 7
1 3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33
2 4 6 8 10 12 14 16 18 20 22 24 26 28 30 32 34
12
14
21
23
11
13
15
20
22
24
10
16
19
25
17
18
9
26
8
6
27
29
7
5
30
28
4
31
1
3
32
34
2
33

Fig. 11

Deoarece orice regiune Jordan coincide cu interiorul închiderii ei (vezi [36], p.477), acesta este un exemplu simplu de regiune care *nu* este regiune Jordan. Exemplul 14 din acest capitol arată că nu *orice* regiune care coincide cu interiorul închiderii ei este o regiune Jordan.

13. Trei regiuni plane disjuncte care au frontiera comună. Acest exemplu este descris cel mai bine printr-o poveste. Pe o insulă, în ocean, trăiește un om. Pe insulă sînt două izvoare cu apă dulce, unul cu apă rece, celălalt cu apă fierbinte. Locuitorul insulei dorește să aducă cele trei surse de apă la o distanță convenabilă de orice punct al insulei. Pentru aceasta el începe să sape canale, totdeauna în așa fel încît insula să rămînă homeomorfă cu forma ei inițială. Mai întîi el construiește un canal de la ocean spre interiorul insulei, astfel încît apa acestuia să se afle față de oricare din punctele uscatului la o distanță de cel mult un metru și în așa fel încît canalul să nu vină în contact cu nici unul din izvoarele cu apă dulce. Apoi, în mod similar, el construiește un canal de la izvorul cu apă dulce rece și un canal de la cel cu apă dulce fierbinte, astfel încît fiecare punct rămas pe uscat să se afle față de aceste trei canale la o distanță de cel mult un metru. Nefiind satisfăcut de acest rezultat, locuitorul insulei repetă procedeul triplu descris, astfel încît fiecare punct rămas pe insulă să se găsească la o distanță de cel mult o jumătate de metru de fiecare din canalele construite. Din nou nesatisfăcut, își îmbunătățește aproximația pînă la un sfert de metru. Apoi extinde procedeul printr-un șir infinit de etape, la fiecare etapă distanța critică, ca și timpul de executare a lucrării fiind înjumătățite, pentru ca totul să poată fi terminat într-un interval finit de timp. Dacă presupunem că „insula" inițială este un disc compact din care au fost înlăturate două discuri interioare deschise și disjuncte, și că „oceanul" este mulțimea plană complementară din afara discului, și că toate extinderile celor trei regiuni inițiale rămîn homeomorfe cu forma lor originală, obținem în final trei regiuni disjuncte, R_1, R_2 și R_3, fiecare din ele fiind reuniunea

regiunilor dintr-un șir infinit de regiuni. Analog, „insula" finală este intersecția F a insulelor dintr-un șir infinit de insule și este frontiera comună a celor trei regiuni R_1, R_2 și R_3. Deoarece complementara lui F este formată nu din două, ci din trei regiuni disjuncte, nici una din regiunile R_1, R_2 și R_3 nu este jordaniană. (Pentru discuție și demonstrație a teoremei lui Jordan, a se vedea [33].) Pe de altă parte, așa cum vom vedea din Exemplul 14, fiecare din aceste trei regiuni este egală cu interiorul închiderii ei.

Această construcție poate fi efectuată cu orice număr finit (chiar și cu o mulțime numerabilă) de regiuni disjuncte. Dacă avem de a face cu mai mult de patru regiuni, putem obține astfel o „hartă" în care toate „țările" au o frontieră comună. Aceasta arată că faimoasa problemă a celor patru culori necesită o formulare îngrijită pentru a evita o soluție banală negativă. (A se vedea [13].)

14. O regiune nejordaniană, care coincide cu interiorul închiderii ei.

Fie R oricare din regiunile R_1, R_2 și R_3 din Exemplul 13. După cum s-a remarcat, R nu este regiune Jordan. Pe de altă parte, vom demonstra acum că R coincide cu interiorul închiderii ei. În primul rînd, dat fiind că $R \subset \bar{R}$ și că R este deschisă, $R = I(R) \subset I(\bar{R})$. Vrem să demonstrăm acum incluziunea opusă: $I(\bar{R}) = I(R \cup F) \subset R$. Dacă propoziția ar fi falsă ar exista un punct p al lui F care ar fi punct interior al lui $R \cup F$. Aceasta înseamnă că există o vecinătate N a lui p, situată în $R \cup F$ și care, deci, nu conține puncte ale nici uneia din celelalte două regiuni, ceea ce contrazice faptul că fiecare punct al lui F este un punct limită al fiecăreia din cele trei regiuni R_1, R_2 și R_3.

15. O regiune plană mărginită a cărei frontieră are măsura pozitivă.

Fie A o mulțime Cantor de măsură pozitivă din $[0,1]$ și fie

$$R = ((0,1) \times (-1,1)) \setminus (A \times [0,1)).$$

Scanned with OKEN Scanner

Atunci R este o regiune și

$$F(R) = (\{0\}\times[-1,1]) \cup (\{1\}\times[-1,1]) \cup (A\times[0,1)) \cup$$
$$\cup ((0,1)\times\{1\}) \cup ((0,1)\times\{-1\}),$$

de unde $\mu(F(R)) = \mu(A) > 0$. Evident, R nu este o regiune Jordan ($I(R) \neq R$). (A se vedea [14], p.292). (Vezi Exemplul 4, Capitolul 11, pentru o regiune *Jordan*, a cărei frontieră are măsura plană pozitivă.)

16. Un arc simplu de lungime infinită.

Primul exemplu: Fie

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x = 1/n,\ n\in\boldsymbol{N}^*,\ n \text{ impar}, \\ 1/n, & \text{dacă } x = 1/n,\ n\in\boldsymbol{N}^*,\ n \text{ par}; \end{cases}$$

fie $f(0) = 0$ și fie $f(x)$ liniară în fiecare interval $[1/(n+1), 1/n]$, $n\in\boldsymbol{N}^*$. Atunci graficul lui $f(x)$ pentru $x\in[0,1]$, este un arc simplu de lungime infinită, datorită divergenței seriei armonice.

Al doilea exemplu: Fie $f(x) = x \sin(1/x)$, pentru $x\in(0,1]$ și $f(0) = 0$. Graficul lui $f(x)$ pentru $x\in[0,1]$ este din nou un arc simplu, de lungime infinită, din aceleași motive ca în primul exemplu. Lungimile arcelor poligonale înscrise domină sumele înălțimilor arcelor individuale ale graficului lui $f(x)$ și aceste sume sînt de forma $\Sigma 2/(2n-1)\pi$.

Spre deosebire de aceste două exemple, graficul funcției definită prin $f(x) = x^2 \sin(1/x)$ pentru $x\in(0,1]$ și $f(0) = 0$, are lungimea finită pentru $x\in[0,1]$, deoarece funcția este derivabilă și derivata ei este mărginită în acest domeniu. (A se vedea [36], p.353, Ex. 24 și 27, p.176, Teorema II.)

17. Un arc simplu de lungime infinită care are tangentă în fiecare punct.

Dacă $f(x) = x^2 \sin(1/x^2)$ pentru $x\in(0,1]$ și $f(0) = 0$, graficul lui $f(x)$ pentru $x\in[0,1]$ este un arc simplu de lungime

Scanned with OKEN Scanner

infinită, din motivele indicate în al doilea exemplu din Exemplul 16. Graficul lui $f(x)$ are tangentă în fiecare punct, deoarece $f(x)$ este derivabilă peste tot.

18. Un arc simplu a cărui lungime este infinită între orice pereche de puncte distincte de pe arc.

Primul exemplu: Fie $f(t) = (x(t), y(t))$ un arc care umple un pătrat, aplică $[0,1]$ pe $[0,1]\times[0,1]$ și are și proprietatea suplimentară că f aplică orice interval nedegenerat din $[0,1]$ pe o mulțime cu interior (bidimensional) nevid. (Aplicația din Exemplul 6 are această proprietate.) Atunci atît graficul lui $x(t)$ cît și cel al lui $y(t)$, pentru $t\in[0,1]$, au aceste proprietăți.

Pentru a vedea că graficul lui $x(t)$, pentru $a \leqslant t \leqslant b$, de exemplu, este de lungime infinită, trebuie să folosim faptul (a se vedea Exemplul 9) că $x(t)$ ia cel puțin două din valorile sale de o infinitate nenumerabilă de ori.

Al doilea exemplu: Fie f o aplicație de tipul celor descrise în Exemplul 10 și cu proprietatea că orice subinterval nedegenerat al lui $[0,1]$ este aplicat pe o mulțime cu măsura plană pozitivă. Atunci f are proprietățile specificate mai sus, deoarece orice arc simplu rectificabil are măsura plană nulă (a se vedea [36], p.436).

Al treilea exemplu: Graficul oricărei funcții care este continuă peste tot și nicăieri derivabilă pe un interval închis (vezi Capitolul 3, Exemplul 8) are proprietățile cerute, deoarece dacă acest grafic ar fi rectificabil, funcția ar fi cu variație mărginită și orice funcție cu variație mărginită este derivabilă aproape peste tot. (A se vedea [16].)

Al patrulea exemplu: A se vedea [14], p.190.

19. O curbă netedă C, care conține un punct P, care nu este niciodată cel mai apropiat punct al lui C, pentru nici un punct de pe partea concavă a lui C.

Fie drept curbă C graficul ecuației $y^3 = x^4$, care are peste tot concavitatea în sus, și fie $P = (0,0)$. Dacă (a, b) este un

Scanned with OKEN Scanner

punct aflat deasupra lui C și dacă $a \neq 0$, atunci, evident, $(a, a^{4/3})$ este mai aproape de (a, b) decît $(0,0)$. Dacă b este un număr arbitrar mai mare decît, sau egal cu 1, atunci punctul $\left(\frac{1}{8}, \frac{1}{16}\right)$ este mai apropiat de $(0, b)$ decît $(0,0)$. În sfîrșit, dacă b este un număr pozitiv arbitrar, mai mic decît 1, atunci punctul (b^3, b^4) este mai apropiat de $(0,b)$ decît $(0,0)$. Ideea constă în faptul că originea este un punct de curbură infinită (rază de curbură nulă) al lui C. (A se vedea [34], p.258, Ex. 16.)

20. O submulțime A a pătratului unitate $S = [0,1] \times [0,1]$, densă în S și cu proprietatea că orice dreaptă verticală sau orizontală, care intersectează pe S, intersectează pe A într-un singur punct.

Căutăm o corespondență biunivocă f, cu domeniul de definiție și domeniul de valori $[0,1]$ și cu graficul dens în S. Începem prin a defini pe $f(x)$, pentru $x \in (0,1] \cap \mathbb{Q}$, în etape. Fie punctele lui $B = ((0,1] \cap \mathbb{Q}) \times ((0,1] \cap \mathbb{Q})$ aranjate într-un șir: $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots$ În etapa zero definim $f(x_1) = y_1$. Pentru etapa întîi, partiționăm pe B în patru mulțimi disjuncte, prin linii bisectoare orizontale și verticale,

$$\left(\left(0, \frac{1}{2}\right] \cap \mathbb{Q}\right) \times \left(\left(0, \frac{1}{2}\right] \cap \mathbb{Q}\right), \left(\left(0, \frac{1}{2}\right] \cap \mathbb{Q}\right) \times \left(\left(\frac{1}{2}, 1\right] \cap \mathbb{Q}\right), \ldots$$

și notăm aceste mulțimi, luate într-o ordine arbitrară, în modul următor $B_{11}, B_{12}, B_{13}, B_{14}$. Să notăm cu (x_{11}, y_{11}) primul punct din șirul $\{(x_n, y_n)\}$, care aparține lui B_{11} și are proprietatea că nu este adevărată nici una din egalitățile $x_{11} = x_1, y_{11} = y_1$. Fie $f(x_{11}) = y_{11}$. În continuare fie (x_{12}, y_{12}) primul punct din șirul $\{(x_n, y_n)\}$ care aparține lui B_{12} și are proprietatea că x_{12} nu coincide nici cu x_1, nici cu x_{11}, iar y_{12} nu coincide nici cu y_1, nici cu y_{11}. Fie $f(x_{12}) = y_{12}$. După ce a fost definită în mod similar $f(x_{13}) = y_{13}$, notăm cu (x_{14}, y_{14}) primul punct al șirului $\{(x_n, y_n)\}$

Scanned with OKEN Scanner

care aparține lui B_{14} și are proprietatea că x_{14} nu coincide cu nici unul din numerele $x_1, x_{11}, x_{12}, x_{13}$, iar y_{14} nu coincide cu y_1, sau y_{11}, sau y_{12}, sau y_{13}. Definim $f(x_{14}) = y_{14}$. Astfel am terminat etapa întîi. Etapa a doua este asemănătoare cu prima; B este partiționat în $16 = 4^2$ mulțimi cu ajutorul altor mediatoare verticale și orizontale, $B_{21}, B_{22}, \ldots, B_{2,4^2}$. După aceea, pentru fiecare mulțime, definim pe f într-un punct rațional, nesituat încă în domeniu și avînd ca valoare un punct rațional neluat încă în considerație, în domeniul valorilor. Dacă continuăm la infinit acest procedeu, cu B împărțit în 4^n părți congruente în etapa n, obținem o funcție care are proprietățile specificate pentru $(0,1] \cap \boldsymbol{Q}$. În sfîrșit, extindem domeniul de definiție și pe cel al valorilor lui f la $[0,1]$, definind $f(x) = x$ pentru $x \in [0,1] \setminus ((0,1] \cap \boldsymbol{Q})$.

21. O mulțime plană nemăsurabilă care are cel mult două puncte comune cu orice dreaptă.

Construcția acestui exemplu, datorat lui W. Sierpiński [44], se bazează pe principiul maximalității, sub forma teoremei de bună ordonare și, de asemenea, sub forma lemei lui Zorn (a se vedea [16], [30] și [46]). Începem prin a enunța patru propoziții legate de numerele cardinale și de cele ordinale.

(*i*) Dacă $\mathfrak{a}$ este un cardinal infinit, atunci $\mathfrak{a}^2 = \mathfrak{a}$ (a se vedea [16] și [46]);

(*ii*) Cardinalul $\mathfrak{f}$ al mulțimii mulțimilor închise cu măsura plană pozitivă este $\mathfrak{c}$, cardinalul lui $\boldsymbol{R}$ (Într-adevăr, deoarece mulțimile închise și complementarele lor sînt în corespondență biunivocă, $\mathfrak{f}$ este mai mic sau egal cu cardinalul mulțimii tuturor mulțimilor deschise. Deoarece orice mulțime deschisă este o reuniune numerabilă de discuri deschise care au raze raționale și centre cu coordonate raționale, rezultă $\mathfrak{f} \leqslant \mathfrak{c}$. Deoarece discurile închise centrate în origine formează o mulțime cu cardinalul $\mathfrak{c}$, rezultă $\mathfrak{f} \geqslant \mathfrak{c}$);

Scanned with OKEN Scanner

(*iii*) Fie Ψ primul număr ordinal care corespunde cardinalului $\mathfrak{c}$ (a se vedea Capitolul 12, Exemplul 10). Atunci $\{\alpha \mid \alpha < \Psi\}$ are cardinalul $\mathfrak{c}$;

(*iv*) Dacă E este o mulțime liniară măsurabilă, cu măsura liniară pozitivă, atunci cardinalul lui E este $\mathfrak{c}$. (E conține o mulțime liniară închisă F de măsură liniară pozitivă, iar F este reuniunea unei mulțimi numerabile (eventual vidă) cu o mulțime perfectă (obligatoriu nevidă). A se vedea [20] și [45].)

Fie $\alpha \to F_\alpha$ o aplicație biunivocă a mulțimii $\{\alpha \mid \alpha < \Psi\}$ pe mulțimea tuturor mulțimilor închise cu măsura plană pozitivă. Fie $\mathfrak{F}$ familia tuturor funcțiilor $p(\alpha)$, ale căror domenii sînt de forma $[1,\beta)$ pentru un $\beta \leqslant \Psi$, și ale căror domenii de valori sînt submulțimi ale planului și au proprietatea că

(*a*) $p(\alpha) \in F_\alpha$ pentru orice $\alpha \in$ domeniul lui $p(\alpha)$,

(*b*) oricare trei puncte din domeniul valorilor lui $p(\alpha)$ nu sînt coliniare.

Fie $\mathcal{G}$ mulțimea tuturor domeniilor de valori ale funcțiilor din $\mathfrak{F}$ și fie $\mathcal{G}$ ordonată parțial prin relația de incluziune. Atunci, din lema lui Zorn (a se vedea [16], [30] și [46]), există o mulțime maximală $E \in \mathcal{G}$, care este domeniul de valori pentru o funcție $q(\alpha)$ a mulțimii $\mathfrak{F}$. Dacă domeniul lui $q(\alpha)$ este $[1,\beta)$ vom demonstra prin absurd că $\beta = \Psi$; într-adevăr, ipoteza $\beta < \Psi$ ne va duce la o contradicție. Dacă $\mathfrak{b}$ este cardinalul care corespunde lui β, atunci $\mathfrak{b} \leqslant \mathfrak{b}^2 < \mathfrak{c}$ (inegalitatea strictă $\mathfrak{b} < \mathfrak{b}^2$ este adevărată, dacă și numai dacă $1 < \mathfrak{b}$ iar $\mathfrak{b}$ este finit). Aceasta înseamnă că puterea (cardinalul) mulțimii tuturor direcțiilor determinate de perechi de puncte din domeniul valorilor E al lui $q(\alpha)$ este mai mică decît $\mathfrak{c}$, și deci există o direcție θ care diferă de toate direcțiile determinate de perechi de puncte din E. Atunci o dreaptă L cu direcția θ trebuie să intersecteze mulțimea F_β după o mulțime cu măsura liniară pozitivă (conform teoremei lui Fubini). Dat fiind că această mulțime are cardinalul $\mathfrak{c}$, există un punct $p_\beta \in F_\beta$, astfel încît p_β nu este coliniar cu nici o pereche de puncte din domeniul valorilor lui $q(\alpha)$. Prelungim acum funcția $q(\alpha)$ astfel încît domeniul ei de definiție să fie $[1,\beta] = [1, \beta + 1)$, astfel încît $q(\beta) = p_\beta$. Atunci această prelungire $q(\alpha)$ are atît proprietatea (*a*), cît și proprietatea (*b*), iar dome-

Scanned with OKEN Scanner

niul ei de valori este strict mai mare decît elementul *maximal* E al lui $\mathcal{G}$. Aceasta este contradicția căutată și deci $\beta = \Psi$, domeniul funcției $q(\alpha)$ constă din *toți* α mai mici decît Ψ, iar domeniul valorilor E al lui $q(\alpha)$ conține un punct p_α din *fiecare* mulțime plană închisă F_α de măsură plană pozitivă.

Vom demonstra acum, prin absurd (presupunînd contrariul și ajungînd la o contradicție), că mulțimea E nu este măsurabilă. Într-adevăr, dacă E ar fi măsurabilă, tot astfel ar fi și complementara ei E', și, dat fiind că E' nu conține nici o mulțime plană închisă de măsură plană pozitivă, E' trebuie să aibă măsura nulă. Pe de altă parte, deoarece fiecare dreaptă din plan intersectează pe E în cel mult două puncte, E trebuie să fie și ea de măsură nulă (conform teoremei lui Fubini). Deci întregul plan, ca reuniune de două mulțimi E și E' de măsură nulă, are măsura nulă și am ajuns la o contradicție.

Mai observăm că dacă S este o mulțime oarecare de măsură plană pozitivă, atunci $S \cap E$ nu este măsurabilă. Să presupunem că $S \cap E$ ar fi măsurabilă, atunci din teorema lui Fubini rezultă $\mu(S \cap E) = 0$, de unde $\mu(S \setminus E) > 0$. Astfel, $S \setminus E$ conține o mulțime închisă F de măsură plană pozitivă. Dar, deoarece $F \cap E = \emptyset$, ajungem la contrazicerea proprietății fundamentale a lui E: E interesează orice mulțime închisă de măsură plană pozitivă.

S. Mazurkiewicz [31] a construit o mulțime plană E, care intersectează fiecare dreaptă a planului în *exact* două puncte. Totuși, o asemenea mulțime E poate fi măsurabilă și atunci este într-adevăr de măsură nulă. Aceasta rezultă prin construcție, care depinde numai de existența unei mulțimi E_1 în plan cu proprietatea că E_1 intersectează orice dreaptă după o mulțime cu cardinalul $\mathfrak{c}$. Mulțimea E este formată atunci ca submulțime a lui E_1.

Totuși mulțimile care au proprietatea lui E_1 pot avea măsura plană nulă. Fie, de exemplu, C mulțimea lui Cantor pe $[0,1]$ și fie

$$E_1 = (\boldsymbol{R} \times C) \cup (C \times \boldsymbol{R}).$$

Este evident atunci că orice dreaptă intersectează E_1 după o mulțime cu cardinalul $\mathfrak{c}$ și, totuși, E_1 este o mulțime (închisă) de măsură plană nulă.

Scanned with OKEN Scanner

În [3] se dă construcția unei „mulțimi Mazurkiewicz" ca răspuns la o problemă pusă în aceeași revistă.

F. Galvin a demonstrat următoarele: Dacă $1 < n \leqslant \aleph_0$, unde $\aleph_0$ este cardinalul lui $\boldsymbol{N}$, atunci există în plan o mulțime nemăsurabilă S cu proprietatea că intersecția lui S cu orice dreaptă constă din exact n puncte.

22. O funcție nenegativă de două variabile $f(x,y)$ cu proprietatea

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x, y)\, dx\, dy = \int_0^1 \int_0^1 f(x, y)\, dy\, dx = 0$$

și astfel încît $\iint_S f(x, y)\, dA$, unde $S = [0,1] \times [0,1]$, nu există.

Vom da două exemple: într-unul vom folosi integrala Riemann iar în celălalt integrala Lebesgue.

Primul exemplu: Fie f funcția caracteristică a mulțimii din Exemplul 20. Atunci, pentru orice $y \in [0,1]$, $\int_0^1 f(x, y)\, dx = 0$, și pentru orice $x \in [0,1]$, $\int_0^1 f(x, y)\, dy = 0$; aici este vorba de integrale Riemann. Totuși, integrala Riemann dublă a lui f pe S nu există, deoarece pentru f integralele Riemann superioară și, respectiv, inferioară sînt egale cu 1, respectiv 0.

Al doilea exemplu: Fie f funcția caracteristică a mulțimii din Exemplul 21. Atunci integralele iterate (atît Riemann cît și Lebesgue) sînt ambele nule, dar funcția f nu este măsurabilă pe S, deci nu are pe S integrală Lebesgue dublă.

23. O funcție cu valori reale, de o variabilă reală, al cărei grafic este o mulțime plană nemăsurabilă.

Fie $f(x)$ definită pentru $x \in \boldsymbol{R}$ în modul următor:

$$f(x) = \begin{cases} \max \{y \mid (x, y) \in E\}, & \text{dacă } \{y \mid (x, y) \in E\} \neq \emptyset, \\ 0, & \text{dacă } \{y \mid (x, y) \in E\} = \emptyset, \end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

unde E este mulțimea din Exemplul 21. Fie

$$E_1 = \{(x, f(x)) \mid x \in \boldsymbol{R}\} \cap E, \quad E_2 = E \setminus E_1.$$

Atunci sau E_1 sau E_2 (sau ambele) nu sînt măsurabile, dat fiind că reuniunea lor este E. Dacă E_1 nu este măsurabilă, atunci

$$F = \{(x, f(x)) \mid x \in \boldsymbol{R}\},$$

graficul lui f, este reuniunea lui E_1 cu o submulțime a axei x. Dar deoarece aceasta din urmă are măsura plană zero, rezultă că F nu este măsurabilă. Dacă E_2 nu este măsurabilă, fie $g(x)$ definită pentru $x \in \boldsymbol{R}$ în modul următor:

$$g(x) = \begin{cases} \min \{y \mid x, y) \in E\}, \text{ dacă } \{y \mid (x, y) \in E\} \text{ constă din două puncte distincte,} \\ 0, \text{ în celelalte cazuri.} \end{cases}$$

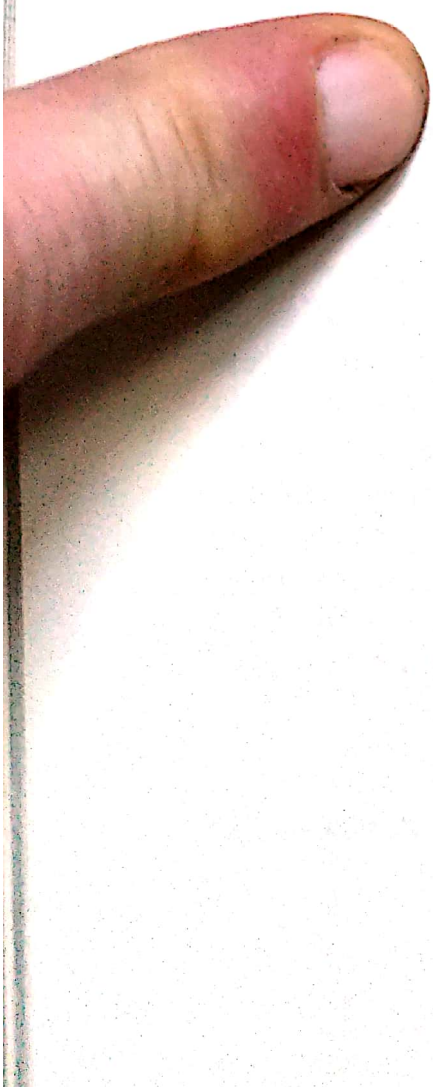
Atunci $G = \{(x, g(x)) | x \in \boldsymbol{R}\}$, graficul lui g, este reuniunea lui E_2 cu o submulțime a axei, deci nu este măsurabilă. Într-un fel sau altul trebuie deci să existe o funcție, al cărei grafic să fie o mulțime plană nemăsurabilă.

24. O mulțime conexă care devine total discontinuă prin înlăturarea unui singur punct.

Vom da numai o schiță a demonstrației. (Pentru detalii vezi [25].)

Fie C mulțimea lui Cantor din Capitolul 8, Exemplul 1, și fie B submulțimea lui C formată din toate capetele intervalelor deschise care au fost excluse din $[0,1]$ în construcția lui C. Fie $E = C \setminus B$ (a se vedea Capitolul 8, Exemplul 24). Pentru orice $x \in C$, fie $L(x)$ segmentul închis care unește, în plan, punctele $(x,0)$ și $(1,1)$. Dacă $x \in B$, fie $S(x)$ mulțimea acelor puncte din $L(x)$, ale căror ordonate sînt iraționale, iar dacă $x \in E$, fie $S(x)$ mulțimea acelor puncte din $L(x)$ ale căror ordonate sînt raționale. Atunci $S = \bigcup_{x \in C} S(x)$ este o mulțime care are proprietățile cerute.

Faptul că S este conexă se demonstrează prin argumente care implică mulțimi de prima sau a doua categorie și vom omite discuția. Dacă $S_0 = S \setminus \{(1,1)\}$, atunci S_0 este total discontinuă. Într-adevăr, dacă $E \subset S_0$, dacă E conține mai mult decît un punct și dacă E este o submulțime a oricărei mulțimi $S(x)$, $x \in C$, atunci, evident, E este neconexă. Pe de altă parte, dacă p și q sînt *două* puncte ale lui S_0, situate pe două intervale *distincte* $L(x)$ și $L(y)$, unde x și $y \in C$, $x < y$, atunci în complementara lui S_0 există o dreaptă care trece prin $(1,1)$ și care separă pe p și q, și anume dreapta care trece prin $(1,1)$ și orice $(a,0)$, unde $x < a < y$ și $a \notin C$.



Scanned with OKEN Scanner

Capitolul 11

Aria

Introducere

Noțiunea de *arie* se bazează pe cea de integrală Riemann dublă. Se spune despre o mulțime plană și mărginită S că **are arie**, dacă și numai dacă funcția ei caracteristică χ_S este integrabilă Riemann pe un dreptunghi închis R, care conține pe S, și ale cărui laturi sînt paralele cu axele de coordonate. Dacă S are arie, atunci **aria** ei $A(S)$ este egală cu integrala dublă a lui χ_S pe R:

$$A(S) = \iint_R \chi_S \, dA.$$

Aceste definiții au semnificație în sensul că noțiunile de *a avea arie* și de *arie* sînt independente de dreptunghiul R care conține mulțimea S. Dacă R este divizat în alte dreptunghiuri închise, cu ajutorul unei rețele $\mathfrak{N}$ de drepte paralele cu laturile lui R, atunci unele din aceste dreptunghiuri pot fi submulțimi ale lui S iar unele pot fi submulțimi ale complementarei S' a lui S. Pentru orice asemenea rețea $\mathfrak{N}$ fie $\bar{a}\{\mathfrak{N}\}$ suma ariilor tuturor subdreptunghiurilor care sînt submulțimi ale lui S ($a(\mathfrak{N}) = 0$, dacă nu există asemenea subdreptunghiuri) și fie $A(\mathfrak{N})$ suma ariilor tuturor subdreptunghiurilor care *nu* sînt submulțimi ale lui S' (adică a căror intersecție cu S este nevidă). **Aria interioară** și **aria exterioară** ale lui S, notate $\underline{A}(S)$ și respectiv $\bar{A}(S)$, sînt definite ca marginea superioară a lui $a(\mathfrak{N})$ și respectiv marginea infe-

rioară a lui $A(\mathfrak{N})$, pentru toate rețelele $\mathfrak{N}$ de drepte paralele cu laturile lui R:

$$\underline{A}(S) = \sup\ a(\mathfrak{N}), \qquad \bar{A}(S) = \inf\ A(\mathfrak{N}).$$

Din nou aceste definiții sînt independente de R. O mulțime mărginită S are arie, dacă și numai dacă $\bar{A}(S) = \underline{A}(S)$ și, în caz de egalitate, $A(S) = \underline{A}(S) = \bar{A}(S)$.

Condiția necesară și suficientă ca o mulțime mărginită S să aibă arie este ca frontiera ei $F(S)$ să aibă arie nulă, sau, echivalent, ca aria exterioară a lui $F(S)$ să fie nulă. Dat fiind că pentru orice mulțime mărginită S, $F(S)$ este o mulțime compactă (și, deci, măsurabilă ca mulțime plană) și întrucît, pentru mulțimile compacte, aria exterioară coincide cu măsura plană (Lebesgue) exterioară, înseamnă că o mulțime mărginită are arie, dacă și numai dacă frontiera ei are măsura plană nulă.

Propozițiile precedente referitoare la arii se aplică în mod similar *volumelor*, pentru mulțimi din spațiul euclidean tridimensional. O generalizare a noțiunilor de *arie* și *volum*, care este aplicabilă în spațiile euclidiene cu oricîte dimensiuni și, în realitate, în spații mult mai generale, este măsura Jordan. (A se vedea [36], p.431.) Măsura Lebesgue este o generalizare a măsurii Jordan în sensul că orice mulțime care are măsură Jordan este măsurabilă, iar măsura Jordan și măsura ei Lebesgue sînt egale. Principalul avantaj al măsurii Lebesgue asupra măsurii Jordan constă în adaptabilitatea mai largă a măsurii Lebesgue la procesele de trecere la limită. Pentru o tratare elementară a ariei plane și a volumului, inclusiv pentru demonstrațiile propozițiilor precedente, trimitem la [36], pp.431—465.

Exemplele 7 și 8 din acest capitol se referă la *aria suprafețelor*. Pentru precizarea acestei noțiuni a se vedea referințele date în legătură cu aceste două exemple.

Scanned with OKEN Scanner

1. O mulțime plană, mărginită, fără arie.

Mulțimea $S = (\boldsymbol{Q} \cap [0, 1]) \times (\boldsymbol{Q} \cap [0, 1])$ a punctelor din pătratul unitate și ale căror coordonate sînt numere raționale, nu are arie, dat fiind că frontiera ei, $F(S)$, nu are aria nulă. (Mulțimea $F(S)$ este chiar pătratul unitate și, deci, aria lui este egală cu 1.) Aria exterioară a lui S este 1, iar aria sa interioară este 0.

2. O mulțime plană, compactă, fără arie.

Fie A o mulțime Cantor cu măsura pozitivă ε(Capitolul 8, Exemplul 4), și fie $S = A \times [0,1]$. Atunci $F(S) = S$ și măsura plană a lui $F(S)$ este egală cu măsura liniară ε a lui A. Dat fiind că $F(S) = S$ este o mulțime compactă, aria ei exterioară este egală cu măsura ei, și este deci pozitivă. Deci S nu are arie. Aria exterioară a lui S este egală cu ε și aria ei interioară este 0.

3. O regiune plană, mărginită, fără arie.

Regiunea R din Capitolul 10, Exemplul 15, este mărginită și nu are arie.

4. O regiune Jordan plană și mărginită fără arie.

Fie ε un număr pozitiv mai mic decît 1 și fie A un arc simplu cu parametrizarea $f(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, situat în pătratul unitate $[0, 1] \times [0, 1]$, și cu măsura plană mai mare decît $1 - \frac{1}{2}\varepsilon$, (a se vedea Capitolul 10, Exemplul 10). Fie C curba simplă închisă formată din reuniunea lui A cu cele trei segmente $\{0\} \times \left[-\frac{1}{2}\varepsilon, 0\right]$, $\{1\} \times \left[-\frac{1}{2}\varepsilon, 0\right]$ și $[0, 1] \times \left\{-\frac{1}{2}\varepsilon\right\}$. În sfîrșit, fie R regiunea mărginită, a cărei frontieră este C. Atunci R este o regiune Jordan a cărei frontieră are aria exterioară mai mare decît $1 - \frac{1}{2}\varepsilon > 1 - \varepsilon > 0$.

Scanned with OKEN Scanner

5. O curbă simplă închisă a cărei măsură plană este mai mare decît cea a regiunii mărginite pe care o închide.

Dacă C și R sînt curba și regiunea definite în Exemplul 4 și dacă μ este măsura plană Lebesgue, atunci

$$\mu(R \cup C) = \mu(R) + \mu(C) \leqslant 1 + \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Deci, dat fiind că $\mu(C) > 1 - \frac{1}{2}\varepsilon$, rezultă că

$$\mu(R) < \varepsilon.$$

Măsura lui R este mai mică decît a lui C, ori de cîte ori $\varepsilon < \frac{2}{3}$. Măsura lui R poate fi făcută oricît de aproape de 0 și, concomitent, măsura lui C poate fi făcută oricît de aproape de 1.

6. Două funcții φ și ψ, definite pe $[0, 1]$, cu proprietățile:
(a) $\varphi(x) < \psi(x)$ **pentru** $x \in [0,1]$,
(b) $\int_0^1 [\psi(x) - \varphi(x)]\, dx$ **există și este egală cu 1,**
(c) $S = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1,\ \varphi(x) < y < \psi(x)\}$ **nu are arie.**

Fie $\varphi(x)$ funcția caracteristică a lui $Q \cap [0, 1]$ și fie $\psi(x) = \varphi(x) + 1$. Atunci (a) și (b) sînt evident satisfăcute, $F(S)$ este dreptunghiul închis $[0, 1] \times [0, 2]$ cu aria pozitivă, de unde rezultă că S nu are arie. Aria exterioară a lui S este 2, iar aria sa interioară este nulă.

Acest exemplu este interesant în legătură cu **principiul lui Cavalieri** care afirmă că dacă orice plan π, paralel cu un plan dat π_0, intersectează două mulțimi tridimensionale W_1 și W_2 după două secțiuni plane cu arii egale, atunci W_1 și W_2 au volume egale (a se vedea [18]). Un analog bidimensional afirmă că dacă orice dreaptă L, paralelă cu o dreaptă dată L_0, intersectează două mulțimi plane S_1 și S_2 după segmente de lungime egală, atunci S_1 și S_2 au arii egale. Acest exemplu demonstrează că dacă nu se presupune

Scanned with OKEN Scanner

că S_1 și S_2 au arie, propoziția este falsă. (Ca mulțimi S_1 și S_2 pot fi alese mulțimea S din (c) și, respectiv, pătratul închis $[0, 1] \times [3, 4]$; familia dreptelor paralele este familia verticalelor.) Lăsăm pe seama cititorului construirea unui contraexemplu analog în spațiul tridimensional.

7. O metodă de a atribui o arie finită, oricît de mare, sau infinită, suprafeței laterale a unui cilindru circular drept.

Fie S cilindrul circular drept

$$S = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = 1,\ 0 \leqslant z \leqslant 1\}$$

cu raza bazei 1 și înălțimea 1 și, pentru orice întreg pozitiv m, definim $2m + 1$ cercuri C_{km}, $k = 0, 1, \ldots, 2m$:

$$C_{km} = S \cap \{(x, y, z) \mid z = k/2m\}.$$

Pe fiecare din aceste $2m + 1$ cercuri, pentru orice n întreg și pozitiv și $j = 0, 1, \ldots, n - 1$, definim punctele echidistante P_{kmj}:

$$P_{kmj} = \begin{cases} \left(\cos \frac{2j\pi}{n},\ \sin \frac{2j\pi}{n},\ \frac{k}{2m}\right), & \text{dacă } k \text{ este par,} \\ \left(\cos \frac{(2j+1)\pi}{n},\ \sin \frac{(2j+1)\pi}{n},\ \frac{k}{2m}\right), & \text{dacă } k \text{ este impar.} \end{cases}$$

Pentru orice cerc C_{km} punctele P_{kmj}, $j = 0, 1, \ldots, n$, sînt vîrfurile unui poligon regulat cu n laturi. Dacă $0 < k \leqslant 2m$, fiecare latură a poligonului înscris în C_{km} este situată deasupra unui vîrf al poligonului din $C_{k-1,\,m}$ și formează împreună cu acesta un triunghi (plan) în spațiu. În mod similar, dacă $0 \leqslant k < 2m$, fiecare latură a poligonului din C_{km} este situată sub un vîrf al poligonului din $C_{k+1,\,m}$ și formează cu acesta un triunghi. Nu este greu de văzut că există, în total, $4mn$ triunghiuri congruente în spațiu, formate în acest mod, ale căror vîrfuri se situează pe cilindrul dat. Aria fiecăruia din aceste triunghiuri este $\sin(\pi/n)\,[(1/4m^2) + (1 - \cos(\pi/n))^2]^{1/2}$.

Scanned with OKEN Scanner

Aria poliedrului Π_{mn}, înscris în S, se obține înmulțind această mărime cu $4mn$. Rezultatul poate fi exprimat prin formula

$$A(\Pi_{mn}) = 2\pi \frac{\sin(\pi/n)}{(\pi/n)} \sqrt{1 + 4m^2 \left(1 - \cos \frac{\pi}{n}\right)^2}.$$

Cînd m și $n \to +\infty$, laturile triunghiurilor amintite tind către zero și, deci, este de presupus că ariile poliedrelor înscrise trebuie să tindă și ele către o limită; este firesc să sperăm că această limită este numărul $(2\pi \cdot 1) \cdot 1 = 2\pi$, dat de formula familiară $2\pi rh$ a suprafeței laterale a unui cilindru circular, unde r este raza bazei iar h înălțimea. Vom vedea totuși că rezultatul va depinde de vitezele *relative* cu care cresc m și n.

Observăm, mai întîi, că atunci cînd $n \to +\infty$ factorul care precede radicalul din formula lui $A(\Pi_{mn})$ are limita 2π și, dat fiind că radicalul însuși este cel puțin egal cu 1, oricare ar fi limita lui $A(\Pi_{mn})$, ea este *cel puțin* 2π. Acum ne vom concentra atenția asupra mărimii de sub radical și, de fapt, asupra funcției

$$f(m, n) = 2m \left(1 - \cos \frac{\pi}{n}\right) = \frac{\pi^2 m}{n^2} - \frac{2\pi^4 m}{4!n^4} + \frac{2\pi^6 m}{6!n^6} - \dots .$$

Vom considera trei cazuri:

(*i*) Dacă $m = n$, atunci

$$f(n,n) = 2n \left(1 - \cos \frac{\pi}{n}\right) = \frac{\pi^2}{n} - \frac{2\pi^4}{4!n^3} + \dots .$$

Deci, $\lim_{n \to +\infty} f(n,n) = 0$ și $\lim_{n \to +\infty} A(\Pi_{mn}) = 2\pi$.

(*ii*) Dacă $m = [\alpha n^2]$, unde parantezele drepte indică funcția „parte întreagă" din Capitolul 2 și unde $0 < \alpha < +\infty$, atunci

$$f([\alpha n^2], n) = 2[\alpha n^2] \left(1 - \cos \frac{\pi}{n}\right) = \frac{\pi^2 [\alpha n^2]}{n^2} - \frac{2\pi^4 [\alpha n^2]}{4!n^4} + \dots .$$

Deci $\lim_{n \to +\infty} f([\alpha n^2], n) = \alpha\pi^2$ și $\lim_{n \to +\infty} A(\Pi_{[\alpha n^2], n}) = 2\pi \sqrt{1 + \alpha^2\pi^4}$.

Scanned with OKEN Scanner

(*iii*) Dacă $m = n^3$, atunci

$$f(n^3, n) = 2n^3\left(1 - \cos\frac{\pi}{n}\right) = \pi^2 n - \frac{2\pi^4}{4!n} + \ldots.$$

Deci, $\lim_{n\to+\infty} f(n^3, n) = +\infty$ și $\lim_{n\to+\infty} A(\Pi_{n^3, n}) = +\infty$.

Conchidem că, atunci cînd m și $n \to +\infty$, putem obține ca limită a lui $A(\Pi_{mn})$ orice rezultat finit sau infinit, cel puțin egal cu 2π. Deși, în general, $\lim_{m,n\to+\infty} A(\Pi_{mn})$ nu există, putem spune, cel puțin, că există *limita inferioară* și că

$$\underline{\lim_{m,n\to+\infty}}\ A(\Pi_{m,n}) = 2\pi.$$

Acest exemplu a fost dat de H.A. Schwarz (Gesammelte Mathematische Abhandlungen, Springer, Berlin, 1890, vol. 2, p.309). El folosește la a demonstra faptul că noțiunea de *arie a suprafeței* este mult mai complicată decît cea de *lungime a arcului*. Pentru o discuție a ariei suprafeței și referințe mai ample, vezi [40]. O tratare elementară a ariei suprafeței este dată în [34], pp.610—635.

8. Pentru două numere pozitive ε și M, o suprafață S din spațiul tridimensional cu proprietățile:

(a) S este homeomorfă cu suprafața unei sfere,

(b) Aria lui S există și este mai mică decît ε,

(c) Măsura Lebesgue tridimensională a lui S există și este mai mare decît M.

Acest exemplu i se datorează lui A.S. Besicovitch (a se vedea [7]). Ideile implicate în această construcție sînt oarecum similare celor implicate în construirea unui arc simplu de măsură plană pozitivă (Capitolul 10, Exemplul 10), dar mult mai complicate. Dat fiind că o discuție amplă ar necesita definirea ariei suprafeței și o descriere complicată a conexiunilor tubulare între fețe ale cuburilor, vom omite detaliile.

Scanned with OKEN Scanner

Următoarea discuție scoate în evidență cîteva aspecte interesante ale Exemplului 8.

a. Există o analogie între Exemplul 8 și Exemplul 5. În ambele cazuri pereții vasului conțin mai mult decît interiorul său. Totuși, măsura liniară (lungimea) a curbei de delimitare din Exemplul 5 este infinită, în timp ce măsura plană (aria suprafeței) a suprafeței de delimitare din Exemplul 8 este finită și mică.

b. Cunoscutele relații dintre volumul unui cub și aria suprafeței sale: volumul $= \frac{1}{6}$ muchie$\times$aria suprafeței, și dintre volumul unei sfere și aria suprafeței ei: volumul $= \frac{1}{3}$ raza $\times$ $\times$ aria suprafeței, conduc la ideea greșită că o suprafață închisă cu aria mică, împreună cu regiunea tridimensională pe care o delimitează, trebuie să aibă măsura tridimensională mică. Exemplul 8 este un contraexemplu pentru această idee.

c. Un „cilindru" drept cu înălțimea finită și care se sprijină pe o curbă Jordan nerectificabilă are volumul (măsura tridimensională) finit și aria suprafeței infinită (Acest „vas" poate fi umplut cu vopsea, dar suprafețele sale laterale nu pot fi vopsite). Acest exemplu este într-o oarecare măsură dualul Exemplului 8.

9. O mulțime plană de măsură plană arbitrar de mică în interiorul căreia direcția unui segment de dreaptă, de lungime unitate, poate fi inversată printr-o mișcare continuă.

Acest exemplu a fost dat în 1928 de A.S. Besicovitch ca soluție a unei probleme puse în 1917 de S. Kakeya (A se vedea [5], [6] și [23] și, pentru o discuție amănunțită, [8].)

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul 12

Spaţii metrice şi topologice

Introducere

Un **spaţiu metric** este o pereche ordonată (X,d), unde X este o mulţime nevidă şi d o funcţie cu valori reale definită pe $X \times X$, astfel încît

(*i*) d este **strict pozitivă**:

$$x \in X \Rightarrow d(x, x) = 0;\ x \text{ şi } y \in X,\ x \neq y \Rightarrow d(x, y) > 0.$$

(*ii*) este valabilă **inegalitatea triunghiului**:

$$x, y \text{ şi } z \in X \Rightarrow d(x, z) \leqslant d(y, x) + d(y, z).$$

O consecinţă imediată a lui (*i*) şi (*ii*) este

(*iii*) d este **simetrică**:

$$x \text{ şi } y \in X \Rightarrow d(x, y) = d(y, x).$$

Funcţia d este **metrica** spaţiului metric (X, d) şi numărul $d(x, y)$ este **distanţa** dintre punctele x şi y. Dacă metrica este subînţeleasă din context vom folosi numai litera X pentru a desemna atît un spaţiu metric, cît şi mulţimea punctelor lui.

Un **spaţiu topologic** este o pereche ordonată $(X, \mathcal{O})$, unde X este o mulţime nevidă şi $\mathcal{O}$ o familie de submulţimi a lui X, astfel încît

$$(i)\ \emptyset \in \mathcal{O} \text{ şi } X \in \mathcal{O},$$

Scanned with OKEN Scanner

(*ii*) $\mathcal{O}$ este închisă față de intersecția finită:

$$O_1, \ldots, O_n \in \mathcal{O} \Rightarrow O_1 \cap \ldots \cap O_n \in \mathcal{O},$$

unde n este orice întreg pozitiv,

(*iii*) $\mathcal{O}$ este închisă față de orice reuniune

$$(\lambda \in \Lambda \Rightarrow O_\lambda \in \mathcal{O}) \Rightarrow \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \in \mathcal{O},$$

unde Λ este o **mulțime** nevidă oarecare **de indici**.

Familia $\mathcal{O}$ este *topologia* spațiului topologic $(X, \mathcal{O})$ și elementele ei se numesc mulțimi **deschise.** Familia $\mathcal{O}$ se mai numește și **o topologie** pentru mulțimea X. Dacă familia mulțimilor deschise este evidentă din context, atunci vom desemna cu litera X atît un spațiu topologic cît și mulțimea punctelor sale. În virtutea inducției finite, condiția (*ii*) este echivalentă cu aceeași condiție pentru cazul particular $n = 2$. Un spațiu topologic $(Y, \mathcal{J})$ este un **subspațiu** al unui spațiu topologic $(X, \mathcal{O})$, dacă și numai dacă $Y \subset X$ și $\mathcal{J} = \{Y \cap O \mid O \in \mathcal{O}\}$; în acest caz, se spune că topologia este **indusă** sau **moștenită** din $\mathcal{O}$.

O mulțime este **închisă,** dacă și numai dacă complementara ei este deschisă. O **acoperire deschisă** a unei mulțimi A este o clasă de mulțimi deschise a căror reuniune conține pe A. O mulțime C este **compactă,** dacă și numai dacă orice acoperire deschisă a lui C conține o subacoperire finită. Un **spațiu Hausdorff** este un *spațiu topologic* cu proprietatea că ori de cîte ori x și y sînt două puncte distincte din spațiu, există două mulțimi deschise, disjuncte, dintre care una conține pe x și cealaltă conține pe y. În orice spațiu Hausdorff orice mulțime compactă este închisă. Un punct p este **punct limită** al unei mulțimi A, dacă și numai dacă orice mulțime deschisă care conține pe p conține cel puțin un punct al lui $A \setminus \{p\}$.

Închiderea $\bar{A}$ a unei mulțimi A este intersecția tuturor mulțimilor închise care conțin pe A, și este formată din toate punctele care sînt sau elemente ale lui A, sau puncte

Scanned with OKEN Scanner

limită ale lui A. Închiderea oricărei mulțimi A este o mulțime închisă. O mulțime A este închisă, dacă și numai dacă coincide cu închiderea ei: $A = \bar{A}$. Un **spațiu local compact** este un spațiu topologic cu proprietatea că orice punct este conținut într-o mulțime deschisă a cărei închidere este compactă.

O **bază** pentru topologia unui spațiu topologic $(X, \mathcal{O})$ este o subfamilie $\mathcal{G}$ a lui $\mathcal{O}$, care are proprietatea că orice element nevid al lui $\mathcal{O}$ este reuniunea unei colecții de elemente ale lui $\mathcal{G}$. Un **sistem de vecinătăți** pentru un spațiu topologic $(X, \mathcal{O})$ este o colecție $\mathfrak{M}$ de perechi ordonate (x, N), astfel ca $x \in N$ pentru orice $(x, N) \in \mathfrak{M}$, și colecția tuturor acelor N, astfel ca $(x, N) \in \mathfrak{M}$ să fie o bază pentru $\mathcal{O}$. Un exemplu de sistem de vecinătăți este mulțimea tuturor acelor (x, A), cu proprietățile $x \in A$ și $A \in \mathcal{G}$, unde $\mathcal{G}$ este o bază pentru $(X, \mathcal{O})$. Dacă $\mathcal{G}$ este o familie nevidă de submulțimi ale unei mulțimi X atunci $\mathcal{G}$ este bază pentru o anumită topologie $\mathcal{O}$ a lui X, dacă și numai dacă: (i) X este reuniunea elementelor lui $\mathcal{G}$ și (ii) ori de cîte ori G_1 și G_2 sînt elemente ale lui $\mathcal{G}$ cu intersecția nevidă și $x \in G_1 \cap G_2$, atunci există un element G al lui $\mathcal{G}$, astfel ca $x \in G \subset G_1 \cap G_2$. Dacă au loc (i) și (ii), topologia $\mathcal{O}$ **generată** de $\mathcal{G}$ constă din mulțimile care sînt reuniuni de elemente ale lui $\mathcal{G}$. Un șir $\{x_n\}$ dintr-un spațiu topologic **converge** către un punct x, care este **limita** șirului $\{x_n\}$, dacă și numai dacă

$\forall$ mulțime deschisă O care conține pe x,

$$\exists\, m \in \boldsymbol{N} \ni n \in \boldsymbol{N},\ n > m \Rightarrow x_n \in O.$$

În orice spațiu Hausdorff limitele șirurilor convergente sînt unice.

Dacă $\mathcal{O}_1$ și $\mathcal{O}_2$ sînt două topologii pentru aceeași mulțime X și dacă $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2$, atunci se spune că $\mathcal{O}_1$ este **mai slabă** decît $\mathcal{O}_2$, iar despre $\mathcal{O}_2$ se spune că este **mai tare** decît $\mathcal{O}_1$. Cea mai slabă dintre toate topologiile posibile pe X este **topologia minimă** $\mathcal{O} = \{\emptyset, X\}$ și cea mai tare este **topologia discretă** $\mathcal{O} = 2^X$, formată din toate submulțimile lui X.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă (X, d) este un spațiu metric și dacă $x \in X$, atunci o **vecinătate** sau o **vecinătate sferică** a lui x este o mulțime de forma

$$\{y \mid y \in X,\ d(x, y) < \varepsilon\},$$

unde $\varepsilon > 0$ (x este **centrul** și ε este **raza** acestei vecinătăți sferice). O vecinătate sferică este numită cîteodată și o **sferă deschisă.**

În orice spațiu metric mulțimea tuturor acestor vecinătăți sferice satisface cele două condiții necesare pentru a genera o topologie; în această topologie, numită **topologia** spațiului metric, mulțimea tuturor perechilor ordonate (x, N), unde N este o vecinătate sferică a lui x, este un sistem de vecinătăți. Un spațiu topologic $(X, \mathcal{O})$ este **metrizabil,** dacă și numai dacă există o metrică d în X pentru care $\mathcal{O}$ este topologia spațiului metric (X, d). Se numește **sferă nchisă** într-un spațiu metric (X, d) o mulțime de forma

$$\{y \mid y \in X,\ d(x, y) \leqslant \varepsilon\},$$

unde $x \in X$ și $\varepsilon > 0$ și ea este o mulțime închisă (x se numește **centrul** iar ε **raza**). Adesea în loc de „sferă închisă" se spune, pe scurt, sferă. Într-un spațiu metric o mulțime este **mărginită,** dacă și numai dacă este submulțime a unei sfere. Dacă spațiul (X, d) este mărginit, atunci d se numește **metrică mărginită.** Dacă spațiile metrice (X, d) și (X, d^*) au aceeași topologie, se spune că d și d^* sînt **metrici echivalente.** Dacă (X, d) este un spațiu metric oarecare, atunci d^*, definită de egalitatea

$$d^*(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)},$$

este o metrică mărginită, echivalentă cu d. Astfel, *orice spațiu metrizabil poate fi metrizat cu o metrică mărginită.* În orice spațiu euclidean finit dimensional, cu metrica euclideană, standard, o mulțime este compactă, dacă și numai

Scanned with OKEN Scanner

dacă este închisă și mărginită. Un șir $\{x_n\}$ de puncte într-un spațiu metric (X, d) este un **șir Cauchy,** dacă și numai dacă

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists K \in \boldsymbol{N} \ni m \text{ și } n \in \boldsymbol{N}, \quad m > K \text{ și } n > K \Rightarrow d(x_m, x_n) < \varepsilon.$$

Un spațiu metric este **complet,** dacă și numai dacă orice șir Cauchy de puncte din spațiu converge (către un punct al spațiului). Un spațiu metric care nu este complet este **incomplet.** Noțiunile de *mulțime conexă, mulțime total discontinuă, mulțime perfectă,* se definesc exact ca în spațiile euclidiene (a se vedea Introducerea de la Capitolul 10).

Un spațiu topologic satisface a **doua axiomă de numerabilitate,** dacă, și numai dacă topologia sa are o bază numerabilă. Într-un spațiu topologic o mulțime este **densă,** dacă și numai dacă închiderea ei coincide cu întreg spațiul. Un spațiu topologic este **separabil,** dacă și numai dacă el conține o submulțime numerabilă densă. Un spațiu metrizabil satisface a doua axiomă de numerabilitate, dacă și numai dacă este separabil.

Dacă $(X, \mathcal{O})$ și $(Y, \mathcal{J})$ sînt spații topologice și dacă f este o aplicație de pe X în Y, atunci f este **continuă,** dacă și numai dacă $B \in \mathcal{J} \Rightarrow f^{-1}(B) \in \mathcal{O}$; f este **deschisă,** dacă și numai dacă $A \in \mathcal{O} \Rightarrow f(A) \in \mathcal{J}$; f este **închisă,** dacă și numai dacă $A' \in \mathcal{O} \Rightarrow (f(A))' \in \mathcal{J}$. Dacă f este o aplicație a unui spațiu topologic X pe un spațiu topologic Y, atunci f este o **aplicație topologică** sau **homeomorfism,** dacă și numai dacă f este o corespondență biunivocă și atît f cît și f^{-1} sînt continue.

Fie V un grup aditiv cu elementele $x, y, z...$, iar F un cîmp cu elementele $\lambda, \mu, \nu, ...$ V este **spațiu vectorial** sau **spațiu liniar** peste F, dacă și numai dacă există o funcție $(\lambda, x) \to \lambda x$ de pe $F \times V$ în V, astfel încît pentru toți λ și μ din F și x și y din V avem:

(*i*) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$,

(*ii*) $(\lambda + \mu)\, x = \lambda x + \mu x$,

(*iii*) $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)\, x$,

(*iv*) $1 \cdot x = x$.

Punctele unui spațiu vectorial se mai numesc și **vectori.** Cînd F este corpul $\boldsymbol{R}$ al numerelor reale sau corpul $\boldsymbol{C}$ al

Scanned with OKEN Scanner

numerelor complexe, V se numește **spațiu vectorial normat** peste F, dacă și numai dacă există o **normă** $\| \ \|$ cu valori reale, care pentru orice x și y din V și $\lambda \in F$ are proprietățile:

(*v*) $\|x\| \geqslant 0$; $\|x\| = 0$, dacă și numai dacă $x = 0$,
(*vi*) $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$,
(*vii*) $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$.

Orice spațiu vectorial normat este un spațiu metric cu metrica $d(x, y) = \|x - y\|$. Un **spațiu Banach** este un spațiu vectorial normat și complet.

Pentru informații suplimentare asupra spațiilor topologice și aplicațiilor trimitem la [11], [17], [20], [24], [27], [45] și [50]. Pentru spații vectoriale în general, a se vedea [22]. Pentru spații Banach, a se vedea [4] și [29].

1. Un șir descrescător de mulțimi nevide, închise și mărginite, cu intersecția vidă.

În spațiul $\boldsymbol{R}$ cu metrica mărginită $d(x, y) = \dfrac{|x - y|}{1 + |x - y|}$, fie $F_n = [n, +\infty)$, $n = 1,2,\ldots$. Atunci fiecare F_n este închisă și mărginită iar $\bigcap_{n=1}^{+\infty} F_n = \emptyset$.

Deoarece intersecția vidă nu este posibilă dacă mulțimile nevide sînt compacte, exemplul acesta nu se poate realiza în nici un spațiu euclidean finit dimensional cu metrica euclideană standard.

2. Un spațiu metric incomplet cu topologia discretă.

Spațiul $(\boldsymbol{N}, d)$ al numerelor naturale, cu metrica $d(m, n) = \dfrac{|m - n|}{mn}$ are topologia discretă, deoarece orice mulțime formată dintr-un singur punct este deschisă, dar șirul $\{n\}$ este un șir Cauchy neconvergent.

Scanned with OKEN Scanner

Acest exemplu demonstrează că *completitudinea nu este o proprietate topologică*, deoarece spațiul $\boldsymbol{N}$ cu metrica obișnuită este atît complet, cît și discret. Cu alte cuvinte, este posibil ca două spații metrice să fie homeomorfe chiar atunci cînd unul este complet și altul nu. Un alt exemplu de două asemenea spații este furnizat de cele două intervale homeomorfe $(-\infty, +\infty)$ și $(0, 1)$; numai primul este complet în metrica obișnuită din $\boldsymbol{R}$.

3. Un șir descrescător de sfere nevide și închise într-un spațiu metric complet, cu intersecția vidă.

În spațiul $(\boldsymbol{N}, d)$ al numerelor naturale cu metrica

$$d(m, n) = \begin{cases} 1 + \dfrac{1}{m+n}, & \text{dacă } m \neq n \\ 0, & \text{dacă } m = n, \end{cases}$$

fie

$$B_n = \{m \mid d(m, n) \leqslant 1 + (1/2n)\} = \{n, n+1, \dots\},$$

pentru $n = 1, 2, \dots$. Atunci $\{B_n\}$ satisface condițiile cerute și spațiul este complet, deoarece orice șir Cauchy este „aproape constant".

Dacă omitem completitudinea, sînt posibile exemple banale, de exemplu $\{y \mid |(1/n) - y| \leqslant (1/n)\}$ în spațiul $\boldsymbol{R}_+^*$ al numerelor pozitive, cu metrica obișnuită din $\boldsymbol{R}$. Pe de altă parte, exemplul de față nu este posibil dacă spațiul metric este un spațiu Banach (a se vedea [15]).

Acest exemplu (a se vedea [45] (Sierpiński)) este interesant în legătură cu teorema lui Baire asupra categoriilor (vezi Capitolul 8, Exemplul 7 și [1],[4], [20], [27]), care afirmă că *orice spațiu metric complet* (*nevid* — *N.T.*) este de categoria a doua sau, echivalent, că orice intersecție numerabilă de mulțimi dense, deschise, într-un spațiu metric complet este densă. Demonstrația implică construirea unui șir descrescător de sfere închise, ale căror raze tind către zero, și *în consecință*, a căror intersecție este nevidă. Vedem atunci că,

Scanned with OKEN Scanner

dacă sferele se micșorează, ele trebuie să aibă un punct comun, în timp ce dacă ele *nu* se micșorează, pot să nu aibă nimic comun.

4. O sferă deschisă O și o sferă închisă B, cu același centru și aceeași rază, dar cu $B \neq \overline{O}$.

Fie X orice mulțime formată din mai mult decît un singur punct și fie (X, d) spațiul metric cu

$$d(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x \neq y, \\ 0, & \text{dacă } x = y. \end{cases}$$

Fie x un punct oarecare al lui X și fie O și B sferele deschisă și, respectiv, închisă cu centrul în x și raza 1. Atunci

$$O = \{x\}, \quad B = X,$$

și, dat fiind că topologia este discretă, $\overline{O} = O \neq B$.

Acest exemplu este imposibil în orice spațiu vectorial normat (Lăsăm demonstrația, ca exercițiu, cititorului).

5. Sfere închise B_1 și B_2, cu razele respectiv r_1 și r_2, astfel ca $B_1 \subset B_2$ și $r_1 > r_2$.

Fie (X, d) spațiul metric format din toate punctele (x, y) din discul închis din planul euclidean, definit prin:

$$X = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 9\},$$

cu metrica euclideană obișnuită. Fie $B_2 = X$ și fie

$$B_1 = B_2 \cap \{(x, y) \mid (x - 2)^2 + y^2 \leqslant 16\}.$$

Atunci $B_1 \subset B_2$ și $r_1 = 4 > r_2 = 3$.

Exemplul este imposibil în orice spațiu vectorial normat, deoarece raza oricărei sfere este jumătatea diametrului ei. (Demonstrația este lăsată ca exercițiu.)

Scanned with OKEN Scanner

6. Un spațiu topologic X și o submulțime Y, cu proprietatea că mulțimea punctelor limită ale lui Y nu este închisă.

Fie X orice mulțime formată din cel puțin două puncte și fie în X topologia minimă $\mathcal{O} = \{\emptyset, X\}$. Dacă y este un element oarecare al lui X, fie $Y = \{y\}$. Atunci mulțimea punctelor limită ale lui Y este formată din toate punctele lui X cu *excepția* lui y. Aceasta înseamnă că mulțimea punctelor limită este $X \setminus Y$ și, dat fiind că Y nu este deschisă, $X \setminus Y$ nu este închisă.

7. Un spațiu topologic în care limitele șirurilor nu sînt unice.

Primul exemplu: Orice spațiu cu topologia minimă și format din mai mult decît un singur punct are această proprietate, deoarece în acest spațiu orice șir converge către orice punct.

Al doilea exemplu: Fie X o mulțime infinită și fie $\mathcal{O}$ formată din $\emptyset$ și complementarele mulțimilor finite din X. Atunci orice șir de puncte *distincte* din X converge către orice element al lui X.

8. Un spațiu separabil cu un subspațiu neseparabil.

Primul exemplu: Fie $(\boldsymbol{R}, \mathcal{O})$ spațiul numerelor reale cu topologia $\mathcal{O}$ generată de baza formată din mulțimile de forma

$$\{x\} \cup (\boldsymbol{Q} \cap (x - \varepsilon,\ x + \varepsilon)),\ x \in \boldsymbol{R},\ \varepsilon > 0,$$

și fie $(Y, \mathcal{J})$ subspațiul numerelor iraționale cu topologia discretă (aceasta *este* un subspațiu, dat fiind că orice mulțime din Y formată dintr-un singur punct este intersecția lui Y cu un element din $\mathcal{O}$). Atunci $\boldsymbol{Q}$ este o submulțime numerabilă, densă în $(\boldsymbol{R}, \mathcal{O})$, dar $(Y, \mathcal{J})$ nu are submulțime densă numerabilă.

Al doilea exemplu: Fie $(X, \mathcal{O})$ spațiul tuturor punctelor (x, y) din planul euclidean cu proprietatea $y \geqslant 0$ și fie $\mathcal{O}$

Scanned with OKEN Scanner

topologia generată de baza formată din mulțimile de următoarele două tipuri:

$$\{(x, y) \mid [(x-a)^2 + (y-b)^2]^{1/2} < \min\ (b, \varepsilon)\},\ a \in \boldsymbol{R},\ b > 0,$$

$$\varepsilon > 0,$$

$$\{(a, 0)\} \cup \{(x, y) \mid (x-a)^2 + (y-\varepsilon)^2 < \varepsilon^2\},\ a \in \boldsymbol{R},\ \varepsilon > 0.$$

Atunci mulțimea $\{(x, y) \mid x \in \boldsymbol{Q},\ y \in \boldsymbol{Q} \cap \mathfrak{Q}\}$ este o submulțime densă numerabilă a lui $(X, \mathcal{O})$, dar spațiul $\{(x, y) \mid x \in \boldsymbol{R},\ y = 0\}$ cu topologia discretă este un subspațiu al lui $(X, \mathcal{O})$ care nu conține nici o submulțime densă numerabilă. (A se vedea [1], p.29, 5^0.)

9. Un spațiu separabil care nu satisface a doua axiomă de numerabilitate.

Fiecare din exemplele din Exemplul 8 satisface acestor specificări deoarece (1) orice spațiu care satisface a doua axiomă de numerabilitate este separabil și (2) orice subspațiu al unui spațiu care satisface a doua axiomă de numerabilitate satisface, de asemenea, a doua axiomă de numerabilitate. Dacă oricare exemplu din Exemplul 8 ar satisface a doua axiomă de numerabilitate, atunci subspațiul considerat ar fi separabil.

10. Două topologii distincte, într-o mulțime dată, care au aceleași șiruri convergente.

Primul exemplu: Fie $(X, \mathcal{O})$ orice spațiu nenumerabil, $\mathcal{O}$ fiind formată din $\emptyset$ și complementarele mulțimilor numerabile (eventual vide sau finite). Atunci șirul $\{x_n\}$ converge către x, dacă și numai dacă $x_n = x$ pentru $n >$ un anumit $m \in \boldsymbol{N}$. Cu alte cuvinte, șirurile convergente sînt chiar cele din $(X, \mathcal{J})$, unde $\mathcal{J}$ este topologia discretă. În sfîrșit, $\mathcal{O} \neq \mathcal{J}$.

Al doilea exemplu: Fie X mulțimea numerelor ordinale mai mici decît, sau egale cu Ω, unde Ω este primul ordinal

Scanned with OKEN Scanner

care corespunde unei mulțimi nenumărabile. (A se vedea [20], și [46].) Fie $\mathcal{O}$ generată de intervalele

$$[1, \beta), \quad (\alpha, \beta), \quad (\alpha, \Omega],$$

unde α și $\beta \in X$. Deoarece orice mulțime numerabilă din $X \setminus \{\Omega\}$ are o margine superioară în $X \setminus \{\Omega\}$, nici un șir de puncte din $X \setminus \{\Omega\}$ nu poate să conveargă spre Ω. Deci, un șir din X converge spre Ω, dacă și numai dacă termenii lui, cu excepția unui număr finit, sînt toți egali cu Ω. Cu alte cuvinte, șirurile convergente din X coincid cu cele din topologia obținută prin adjuncționarea punctului Ω ca *punct izolat*, (adică considerînd $\{\Omega\}$ o mulțime deschisă formată dintr-un singur punct în noul spațiu X) *subspațiului* $X \setminus \{\Omega\}$ al lui X.

Al treilea exemplu: (A se vedea [4] și [29] pentru definiții și discuții.) Fie X spațiul Banach l_1 al șirurilor reale (sau complexe) $x = \{x_n\}$, astfel ca $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < +\infty$, cu norma $\|x\| = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$. **Topologia tare** din X este cea a spațiului metric (X, d), $d(x, y) = \|x - y\|$.

Definim acum a doua topologie în X, numită **topologia slabă,** cu ajutorul următorului sistem de vecinătăți:

$$N_x = \left\{ y = \{y_n\} \;\middle|\; \left| \sum_{n=1}^{+\infty} a_{mn}(y_n - x_n) \right| < \varepsilon, \quad m = 1, 2, \ldots, p \right\},$$

unde (a_{mn}) este o matrice mărginită $p \times (+\infty)$, $x \in X$, și $\varepsilon > 0$. Se poate demonstra că $\{N_x\}$ satisface acele condiții, specificate în Introducere, care garantează generarea unui spațiu topologic $(X, \mathcal{O})$.

Pentru a demonstra că topologia tare din X este într-adevăr mai tare decît topologia slabă, vom arăta că orice vecinătate slabă a unui punct x conține o vecinătate sferică a lui x.

Scanned with OKEN Scanner

Acesta este un corolar simplu al inegalității triunghiului pentru serii reale:

$$\left|\sum_{n=1}^{+\infty} a_{mn}(y_n - x_n)\right| \leqslant K \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} |y_n - x_n| = K \cdot \|y - x\|,$$

unde K este un majorant al mulțimii valorilor absolute ale elementelor matricei (a_{mn}). Pentru a demonstra că topologia tare este *strict* mai tare decît topologia slabă, vom arăta acum că *orice vecinătate slabă este nemărginită în metrica topologiei tari* (și deci *nici* o vecinătate slabă nu este submulțime a *vreunei* vecinătăți tari). Așadar, fie (a_{mn}) matricea $p \times (+\infty)$ pentru o vecinătate slabă N_x, fie $(z_1, z_2, \ldots, z_{p+1})$ un vector *nenul* de dimensiune $(p+1)$, astfel ca

$$\sum_{n=1}^{p+1} a_{mn} z_n = 0 \text{ pentru } m = 1, 2, \ldots, p,$$

și fie $z_{p+2} = z_{p+3} = \ldots = 0$. Vectorul $y(\alpha) = x + \alpha z = \{y_n(\alpha)\} = \{x_n + \alpha z_n\}$ aparține lui N_x pentru orice număr real α:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_{mn}(y_n(\alpha) - x_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{mn}\alpha z_n = \alpha \sum_{n=1}^{p+1} a_{mn} z_n = 0,$$

$$m = 1, 2, \ldots, p.$$

Pe de altă parte, $\|y(\alpha) - x\| = \|\alpha z\| = |\alpha| \cdot \|z\|$ și $\|z\| \neq 0$.

Ne îndreptăm acum atenția asupra șirurilor de puncte din X. Știm că orice șir $\{x^{(m)}\}$ de puncte din X, care converge spre x în topologia tare, trebuie să conveargă spre x și în topologia slabă. Vom demonstra acum reciproca: Dacă $\lim_{m \to +\infty} x^{(m)} = x$ *în topologia slabă, atunci* $\lim_{m \to +\infty} x^{(m)} = x$ *în topologia tare.* De aici va rezulta că topologiile slabă și tare din X determină șiruri convergente identice.

Să presupunem că există un șir care converge spre x în topologia slabă, dar nu și în topologia tare. Datorită caracterului liniar al celor două definiții ale limitei putem presu-

Scanned with OKEN Scanner

pune, fără a restrînge generalitatea, că limita x este vectorul 0. Mai mult, dacă șirul considerat nu converge spre zero în topologia tare, atunci trebuie să existe un subșir ale cărui norme sînt minorate inferior de un număr pozitiv. Dacă notăm cu $\{x^{(m)}\}$ acest subșir, atunci există un număr pozitiv ε, astfel încît

$$\|x^{(m)}\| \geqslant 5\varepsilon$$

pentru $m = 1, 2, \ldots$ Deoarece $\{x^{(m)}\}$ este un subșir al unui șir care converge slab către 0, $\{x^{(m)}\}$ trebuie să conveargă și el slab către 0. Dacă reprezentăm pe $x^{(m)}$ în felul următor:

$$x^{(m)} = (x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, \ldots, x_n^{(m)}, \ldots),$$

atunci șirul $\{x^{(m)}\}$ este reprezentat de o matrice infinită M, la care fiecare linie corespunde unuia din vectorii șirului $\{x^{(m)}\}$. Următorul pas constă în a demonstra că deoarece $\{x^{(m)}\}$ converge către 0 în topologia slabă, orice coloană din M este un șir real cu limita 0; această înseamnă că pentru orice n fixat, $n = 0, 1, 2, \ldots$, limita, cînd $m \to +\infty$, a celei de a n-a coordonate a lui $x^{(m)}$ este 0:

$$\lim_{m \to +\infty} x_n^{(m)} = 0.$$

Aceasta rezultă imediat dacă luăm în considerare vecinătatea lui 0, determinată de matricea (a_{mn}), care constă dintr-o singură linie, cu 1 pe locul n și 0 în celelalte locuri:

Putem defini acum, prin inducție, două șiruri strict crescătoare de întregi pozitivi $m_1 < m_2 < \ldots$ și $n_1 < n_2 < \ldots$, astfel încît pentru $j \in \boldsymbol{N}$ să avem:

$$(a) \qquad \sum_{n=1}^{n_j} |x_n^{(m_j)}| < \varepsilon, \qquad \sum_{n=n_{j+1}+1}^{+\infty} |x_n^{(m_j)}| < \varepsilon,$$

și, în consecință,

$$(b) \qquad \sum_{n=n_j+1}^{n_{j+1}} |x_n^{(m_j)}| > 3\varepsilon.$$

Scanned with OKEN Scanner

În sfîrșit, definim șirul $\{a_n\}$:

$$a_n = \begin{cases} 1, \text{ dacă } 1 \leqslant n < n_1, \\ \operatorname{sgn} x_n^{(m_j)}, \text{ dacă } n_j + 1 \leqslant n \leqslant n_{j+1}, \end{cases}$$

pentru $j = 1, 2, \ldots$. Dacă N_0 este acea vecinătate a vectorului 0, definită de ε și de matricea (a_{mn}), care constă dintr-o singură linie alcătuită din termenii lui $\{a_n\}$:

$$N_0 = \left\{ y = \{y_n\} \,\middle|\, \left| \sum_{n=1}^{+\infty} a_n y_n \right| < \varepsilon \right\},$$

atunci *nici un* punct $x^{(m_j)}$ al subșirului $\{x^{(m_j)}\}$ al lui $\{x^{(m)}\}$ nu este element al lui N_0:

$$\left| \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x_n^{(m_j)} \right| \geqslant \sum_{n=n_j+1}^{n_{j+1}} |x_n^{(m_j)}| - \left| \sum_{n=1}^{n_j} a_n x_n^{(m_j)} \right| -$$

$$- \left| \sum_{n=n_{j+1}+1}^{+\infty} a_n x_n^{(m_j)} \right| > 3\varepsilon - \varepsilon - \varepsilon = \varepsilon.$$

Aceasta înseamnă că $\{x^{(m)}\}$ nu poate să conveargă spre 0. (Contradicție.)

11. Un spațiu topologic X, o mulțime $A \subset X$ și un punct limită al lui A, care nu este limita nici unui șir din A.

Primul exemplu: Fie X spațiul din primul exemplu din Exemplul 10, precedent, cu A orice submulțime proprie, nenumerabilă a lui X. Atunci orice punct al lui $X \setminus A$ este un punct limită al lui A, dar deoarece x nu poate fi limită a unui șir de puncte din A în topologia discretă, nu poate fi nici în topologia descrisă în acest exemplu.

Al doilea exemplu: Fie X spațiul din al doilea exemplu din Exemplul 10, precedent, cu $A = X \setminus \{\Omega\}$ în prima topologie descrisă în acel exemplu. Atunci Ω este un punct limită al lui A, dar nici un șir din A nu poate să conveargă spre Ω.

Scanned with OKEN Scanner

Al treilea exemplu: (A se vedea [51], unde se construiește un exemplu similar. De asemenea, [4], [15], [29] și [30], pentru definiții și discuții.) Fie X **spațiul Hilbert** real (sau complex) l_2 al tuturor șirurilor $x = \{x_n\}$ de numere reale cu proprietatea că $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n^2 < +\infty \left(\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^2 < +\infty \text{ în cazul complex}\right)$ și în care s-a definit un **produs interior** pentru orice pereche de puncte $x = \{x_n\}$ și $y = \{y_n\}$

$$(x, y) = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n y_n \left(\sum_{n=1}^{+\infty} x_n \bar{y}_n \text{ în cazul complex}\right)$$

cu proprietățile următoare pentru x, y și $z \in l_2$ și $\lambda \in \boldsymbol{R}$ (de aici înainte în acest exemplu, vom avea în vedere numai cazul real):

$$(i)\ (x + y, z) = (x, z) + (y, z),$$

$$(ii)\ (\lambda x, y) = \lambda(x, y),$$

$$(iii)\ (y, x) = (x, y),$$

$$(iv)\ (x, x) \geqslant 0,$$

(v) dacă $\|x\| = (x, x)^{1/2}$, atunci $\| \ \|$ este o normă pentru care l_2 este un spațiu Banach.

Spațiul $X = l_2$ este transformat acum într-un spațiu topologic $(X, \mathcal{O})$ cu ajutorul unui *sistem de vecinătăți*, definit oarecum ca în al treilea exemplu din Exemplul 10:

$$N_x = \{y \mid b \in B \Rightarrow |(y - x, b)| < \varepsilon\},$$

unde B este orice mulțime nevidă, finită, de puncte ale lui X, $x \in X$ și $\varepsilon > 0$.

Fie A mulțimea $\{x^{(m)}\}$, unde $x^{(m)}$ este punctul a cărui a m-a coordonată este $\sqrt{m}$, toate celelalte coordonate fiind egale cu 0:

$$x^{(m)} = (0, 0, \ldots, 0, \sqrt{m}, 0, \ldots).$$

Scanned with OKEN Scanner

Vom arăta, în primul rînd, că vectorul nul este un punct limită al lui A, presupunînd că vecinătatea lui 0

$$N_0 = \{y \mid b \in B \Rightarrow |(y, b)| < \varepsilon\},$$

unde $\varepsilon > 0$ și B constă din punctele $b^{(1)} = \{b_n^{(1)}\}, \ldots, b^{(p)} = \{b_n^{(p)}\}$, nu conține *nici un* punct $x^{(m)}$. Aceasta înseamnă că

$$\forall m \in \boldsymbol{N} \exists k \in \{1, 2, \ldots, p\} \ni \left| \sqrt{m} b_m^{(k)} \right| \geqslant \varepsilon,$$

și deci

$$\sum_{k=1}^{p} \sum_{m=1}^{+\infty} (b_m^{(k)})^2 = \sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{p} (b_m^{(k)})^2 \geqslant \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon^2}{m} = +\infty,$$

ceea ce contrazice convergența seriilor $\sum_{m=1}^{+\infty} (b_m^{(k)})^2$ pentru $k = 1, 2, \ldots, p$.

În sfîrșit, vom arăta că nici un șir de puncte din A nu poate converge spre vectorul nul. Este ușor de arătat că dacă

$$x^{(m_1)}, \; x^{(m_2)}, \ldots, x^{(m_j)}, \ldots \to 0,$$

atunci șirul $m_1, m_2, \ldots$ este nemărginit și de aceea putem presupune, fără a restrînge generalitatea, că $m_1 < m_2 < \ldots$ și că

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{m_j} < +\infty.$$

Încheiem demonstrația definind o vecinătate N_0 a lui 0 cu ajutorul lui $\varepsilon = 1$ și al mulțimii B formate dintr-un singur vector b, a cărui coordonată a m_j-a este $1/\sqrt{m_j}$ pentru $j = 1, 2, \ldots$, celelalte coordonate fiind toate egale cu 0. Atunci *nici un* punct al șirului $\{x^{(m_j)}\}$ nu poate aparține lui N_0, deoarece $(x^{(m_j)}, b) = 1$ pentru $j = 1, 2, \ldots$

Al patrulea exemplu: Vezi Exemplul 12 din acest capitol.

Remarcăm faptul că fenomenul ilustrat în aceste exemple nu poate avea loc într-un spațiu metric și, prin urmare, spațiile de mai sus nu sînt nici metrice, nici metrizabile.

Scanned with OKEN Scanner

12. Un spațiu topologic X ale cărui puncte sînt funcții, a cărui topologie corespunde convergenței punctuale și care nu este metrizabil.

Fie $(X, \mathcal{O})$ spațiul tuturor funcțiilor reale continue definite pe $[0,1]$ și fie $\mathcal{O}$ topologia generată de sistemul de vecinătăți

$$N_f = \{g \mid x \in F \Rightarrow |g(x) - f(x)| < \varepsilon\},$$

unde F este o mulțime finită nevidă din $[0,1]$, $f \in X$ și $\varepsilon > 0$. Evident, dacă în această topologie, $g_n \to g$ cînd $n \to +\infty$, atunci $g_n(x) \to g(x)$ cînd $n \to +\infty$, pentru orice $x \in [0,1]$, deoarece F poate fi luată egală cu mulțimea $\{x\}$ formată dintr-un singur punct. Pe de altă parte, dacă $g_n(x) \to g(x)$ cînd $n \to +\infty$ pentru orice $x \in [0,1]$, atunci $g_n \to g$ cînd $n \to \infty$, deoarece pentru orice $\varepsilon > 0$ și orice mulțime finită F din $[0,1]$, n poate fi ales destul de mare pentru a avea $|(g_n(x) - g(x)| < \varepsilon$, *oricare* ar fi $x \in F$.

Fie A mulțimea tuturor funcțiilor f din X, astfel încît

$$\text{(a)} \quad x \in [0,1] \Rightarrow 0 \leqslant f(x) \leqslant 1,$$

$$\text{b)} \quad \mu(\{x \mid f(x) = 1\}) \geqslant \frac{1}{2}.$$

Atunci 0 este un punct limită al lui A, dar dacă un șir $\{f_n\}$ de elemente din A ar converge spre 0 în topologia $\mathcal{O}$, atunci $\{f_n(x)\}$ ar converge spre 0 pentru orice $x \in [0,1]$ și conform teoremei convergenței dominate a lui Lebesgue, am avea $\int_0^1 f(x)\,dx \to 0$ cînd $n \to +\infty$, ceea ce contrazice inegalitatea $\int_0^1 f_n(x)\,dx \geqslant \frac{1}{2}$. Din observația finală făcută la Exemplul 11, rezultă că X nu este metrizabil.

13. O aplicație continuă a unui spațiu topologic pe un altul, care nu este nici deschisă, nici închisă.

Primul exemplu: Fie $f(x) = e^x \cos x$, domeniile de definiție și de valori fiind egale cu $\boldsymbol{R}$, unde $\boldsymbol{R}$ are topologia obiș-

Scanned with OKEN Scanner

nuită. Atunci f este continuă, dar $f((-\infty,0))$ nu este deschisă și $f(\{-n\pi \mid n \in \boldsymbol{N}\})$ nu este închisă.

Al doilea exemplu: Fie X spațiul $\boldsymbol{R}$ cu topologia discretă, fie Y spațiul $\boldsymbol{R}$ cu topologia obișnuită și fie f aplicația identică.

14. O aplicație a unui spațiu topologic pe un altul, care este deschisă și închisă, dar nu este continuă.

Primul exemplu: Fie X cercul unitate $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$, cu topologia indusă de topologia obișnuită a planului, fie Y intervalul semideschis $[0,2\pi)$, cu topologia indusă de topologia obișnuită a lui $\boldsymbol{R}$, și fie f aplicația $(x, y) \to \theta$, unde $x = \cos\ \theta$, $y = \sin\ \theta$, și $0 \leqslant \theta < 2\pi$. Atunci f este deschisă și închisă, deoarece inversa ei este continuă, dar f este discontinuă în $(1,0)$.

Al doilea exemplu: Inversa aplicației de la al doilea exemplu din Exemplul 13.

15. O aplicație a unui spațiu topologic pe un altul, care este închisă, dar nu este nici continuă, nici deschisă.

Fie X cercul unitate $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$ cu topologia indusă de topologia obișnuită a planului, fie Y intervalul semideschis $[0,\pi)$ cu topologia indusă de topologia obișnuită a lui $\boldsymbol{R}$ și fie f aplicația definită prin

$$(\cos\ \theta,\ \sin\ \theta) \to \begin{cases} 0, & \text{dacă } 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \\ \theta - \pi, & \text{dacă } \pi < \theta < 2\pi. \end{cases}$$

Atunci f nu este deschisă, deoarece semicercul superior deschis al lui X este aplicat într-un punct, iar f nu este continuă în $(1,0)$ (vezi primul exemplu de la Exemplul 14). Totuși, după cum vom vedea în cele ce urmează, f este închisă. Să presupunem că f *nu* este închisă. Atunci există o mulțime închisă A conținută în X, astfel încît $B = f(A)$ nu este închisă în Y. Deci, există un șir $\{b_n\}$ de puncte din B, astfel încît $b_n \to b$ și $b \notin B$. Dacă $f(p_n) = b_n$, unde $p_n \in A$ pentru

Scanned with OKEN Scanner

$n = 1, 2, \ldots$, dat fiind că A este compactă putem presupune, fără a restrînge generalitatea, că șirul $\{p_n\}$ este convergent $p_n \to p \in A$. Deoarece $f(p_n) \to b \neq f(p)$, f este discontinuă în p și $p = (1,0)$. Dar aceasta înseamnă că există un subșir al lui $\{p_n\}$, care tinde spre $(1,0)$ fie de pe semicercul superior, fie de pe cel inferior; în primul caz $b_n \to 0 \in B$, iar în al doilea $\{b_n\}$ nu poate converge în Y. În ambele cazuri se obține o contradicție și prin urmare f este închisă.

16. O aplicație a unui spațiu topologic pe un altul, care este continuă și deschisă, dar nu este închisă.

Fie $(X, \mathcal{O})$ planul euclidean cu topologia obișnuită, $(Y, \mathcal{J})$ spațiul $\boldsymbol{R}$ cu topologia obișnuită și fie P proiecția pe prima coordonată $P: (x, y) \to x$. Atunci P este evident continuă și deschisă, dar $P(\{(x, y) \mid y = \frac{1}{x} > 0\})$ nu este închisă în $(Y, \mathcal{J})$.

17. O aplicație a unui spațiu topologic pe un altul, care este deschisă, dar nu este nici continuă, nici închisă.

Primul exemplu: Fie $X = Y = \boldsymbol{R}$ cu topologia obișnuită și fie f funcția definită în Exemplul 27 din Capitolul 8, al cărei domeniu de valori pe orice interval deschis nevid este egal cu $\boldsymbol{R}$.

Această funcție este evident deschisă, deoarece imaginea oricărei mulțimi deschise nevide este egală cu $\boldsymbol{R}$, și este discontinuă peste tot. Pentru a arăta că f nu este continuă, fie x_n un punct cuprins între n și $n + 1$, astfel încît $f(x_n)$ să fie cuprinsă între $1/(n + 1)$ și $1/n$, pentru $n = 1, 2, \ldots$. Atunci mulțimea $\{x_n\}$ este închisă, dar $\{f(x_n)\}$ nu este închisă.

Al doilea exemplu: Fie $(X, \mathcal{O})$ planul, în care $\mathcal{O}$ constă din $\emptyset$ și din complementarele mulțimilor numerabile; fie $(Y, \mathcal{J})$ dreapta $\boldsymbol{R}$, pe care topologia $\mathcal{J}$ constă din $\emptyset$ și din complementarele mulțimilor finite și fie P aplicația dată de proiecția $P: (x, y) \to x$. Atunci P este deschisă, deoarece orice mulțime deschisă nevidă din $(X, \mathcal{O})$ conține o dreaptă ori-

Scanned with OKEN Scanner

zontală a cărei imagine este $\boldsymbol{R}$. Pe de altă parte, P nu este închisă, deoarece mulțimea punctelor $(n, 0)$, unde $n \in \boldsymbol{N}$ este închisă în $(X, \mathcal{O})$, dar imaginea ei nu este închisă în $(Y, \mathcal{J})$; dat fiind că imaginea reciprocă a oricărei mulțimi deschise din $(Y, \mathcal{J})$, care este submulțime proprie a lui Y, nu este deschisă în $(X, \mathcal{O})$, P nu este continuă.

18. O aplicație a unui spațiu topologic pe un altul, care este continuă și închisă, dar nu este deschisă.

Fie X și Y intervalul închis [0,2] cu topologia obișnuită și fie

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ dacă } 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ x - 1, \text{ dacă } 1 < x \leqslant 2. \end{cases}$$

Atunci f este, evident, continuă și deci este închisă, deoarece X și Y sînt spații metrice compacte. Pe de altă parte, $f((0,1))$ nu este deschisă în Y.

19. Un spațiu topologic X și un subspațiu Y în care există două mulțimi deschise disjuncte, care nu pot fi obținute ca intersecții ale lui Y cu mulțimi deschise disjuncte din X.

Fie $X = \boldsymbol{N}$, mulțimile deschise fiind $\emptyset$ și complementarele de mulțimi finite, și fie $Y = \{1,2\}$. Atunci $\{1\} = Y \cap (X \setminus \{2\})$ și $\{2\} = Y \cap (X \setminus \{1\})$, astfel încît Y este discretă în topologia indusă. Cu toate acestea, cele două mulțimi deschise disjuncte $\{1\}$ și $\{2\}$ ale lui Y nu sînt intersecțiile lui Y cu mulțimi deschise *disjuncte* din X, deoarece oricare două submulțimi deschise nevide din X sînt nedisjuncte.

20. Două spații topologice nehomeomorfe, fiecare fiind imagine continuă și biunivocă a celuilalt.

Primul exemplu: Fie X și Y subspații ale lui $\boldsymbol{R}$, unde $\boldsymbol{R}$ are topologia obișnuită, definite prin:

$$X = \bigcup_{n=0}^{+\infty} ((3n, 3n + 1) \cup \{3n + 2\}), \quad Y = (X \setminus \{2\}) \cup \{1\}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Fie aplicația S a lui X pe Y și aplicația T a lui Y pe X, definite prin:

$$S(x) = \begin{cases} x, \text{ dacă } x \neq 2, \\ 1, \text{ dacă } x = 2, \end{cases}$$

$$T(y) = \begin{cases} \frac{1}{2} y, \text{ dacă } y \leqslant 1, \\ \frac{1}{2} y - 1, \text{ dacă } 3 < y < 4, \\ y - 3, \text{ dacă } y \geqslant 5. \end{cases}$$

Atunci S și T sînt continue, biunivoce și surjective. Cu toate acestea, X și Y nu sînt homeomorfe, deoarece prin orice homeomorfism al lui Y pe X punctul 1 al lui Y nu poate avea corespondent.

Al doilea exemplu: Fie X și Y submulțimi ale planului cu topologia indusă (vezi fig. 12). Segmentele verticale sînt de lungime 2 și sînt deschise la extremitățile superioare, iar cercurile sînt de rază 1. Aplicația S a lui X pe Y este definită în modul următor: linia orizontală a lui X este aplicată pe linia orizontală a lui Y, cercurile D_n pe cercurile C_{n+1}, iar segmentele A_{n+2} pe segmentele B_{n+1}, $n \in \mathbf{N}$.

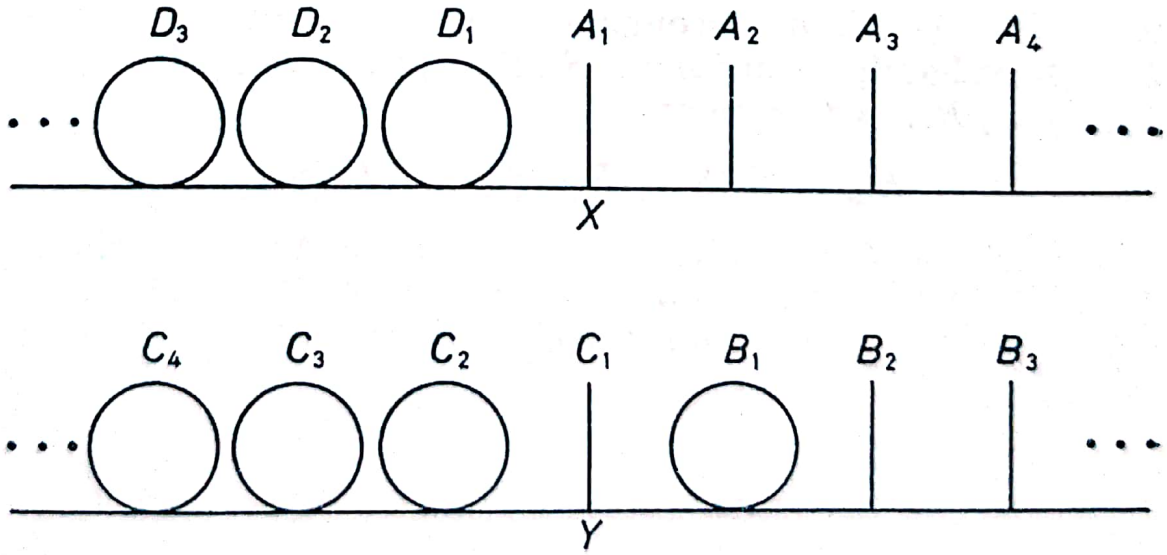


Fig. 12

printr-o translație în jos a fig. 12, în timp ce segmentul A_2 este aplicat pe cercul B_1 printr-o formulă de tipul $x = \sin \pi t$, $y = 1 - \cos \pi t$, unde $0 \leqslant t < 2$. Segmentul A_1 este aplicat de translația în jos, pe C_1. Aplicația T a lui Y pe X este definită în modul următor: linia orizontală a lui Y este aplicată pe linia orizontală a lui X, cercurile C_{n+1} pe cercurile D_{n+2}, segmentele B_{n+1} pe segmentele A_n, $n \in N$, iar cercul B_1 pe cercul D_1, printr-o translație în sus și spre stînga, în timp ce segmentul C_1 este aplicat pe cercul D_2 printr-o formulă de tipul indicat mai sus. Aplicațiile S și T au proprietățile cerute. Lăsăm pe seama cititorului să arate că spațiile X și Y nu sînt homeomorfe.

21. O descompunere a unei sfere euclidiene tridimensionale B în cinci submulțimi disjuncte S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 (unde S_5 este formată dintr-un singur punct) și cinci mișcări rigide R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, astfel încît

$$B \cong R_1(S_1) \cup R_2(S_2) \cong R_3(S_3) \cup R_4(S_4) \cup R_5(S_5)$$

(unde „$\cong$“ înseamnă „congruent cu“). (Vezi referințele din Exemplul 22.)

22. Pentru ε, $M > 0$, două sfere euclidiene B_ε și B_M de raze respectiv ε și M, o descompunere a lui B_ε într-un număr finit de submulțimi disjuncte $S_1, S_2, \ldots, S_n$ și n mișcări rigide $R_1, R_2, \ldots, R_n$, astfel încît

$$B_M = R_1(S_1) \cup R_2(S_2) \cup \ldots \cup R_n(S_n).$$

Ultimele două exemple sînt rezultatul lucrărilor lui Hausdorff, Banach, Tarski, von Neumann și R. Robinson. Vom indica doar o lucrare unde ele sînt discutate în detaliu. (Vezi [41].)

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul 13

Spaţii de funcţii

Introducere

Un **spaţiu de funcţii** este o colecţie de funcţii care au un domeniu comun D. De obicei se presupune că un spaţiu de funcţii este înzestrat cu o anumită structură algebrică sau topologică. În acest capitol ne vom îndrepta atenţia asupra structurilor **algebrice** ale anumitor spaţii de funcţii de variabilă reală, cu valori reale, al căror domeniu comun este un interval fixat I.

Se spune că un spaţiu S de funcţii cu valori reale, definite pe un interval I, este un **spaţiu vectorial** sau un **spaţiu liniar** peste $\boldsymbol{R}$ (sistemul numerelor reale), dacă şi numai dacă S este închis faţă de combinaţiile liniare cu coeficienţi reali, adică, dacă şi numai dacă

$$f, g \in S,\ \lambda, \mu \in \boldsymbol{R} \Rightarrow \lambda f + \mu g \in S,$$

unde funcţia λf este definită prin formula

$$(\lambda f)(x) = \lambda(f(x)).$$

Este uşor de demonstrat că un spaţiu de funcţii cu valori reale, definite pe un interval, este un spaţiu vectorial, dacă şi numai dacă este închis faţă de cele două operaţii de *adunare*, $f + g$, şi *înmulţire cu scalari*, λf. Conceptul abstract de *spaţiu vectorial* este definit axiomatic în Introducerea la Capitolul 12. (Pentru o discuţie mai amplă a se vedea [22].) Multe din cele mai importante clase de funcţii din analiza clasică sînt spaţii vectoriale peste $\boldsymbol{R}$ (sau peste $\boldsymbol{C}$, corpul

Scanned with OKEN Scanner

numerelor complexe, în care caz coeficienții λ și μ sînt numere complexe oarecare). Exemple de spații de funcții cu valori reale, care sînt spații vectoriale peste $\boldsymbol{R}$ sînt următoarele:

1. *Toate* funcțiile (cu valori reale) definite pe un interval I. 2. Toate funcțiile *mărginite* definite pe un interval I. 3. Toate funcțiile *integrabile Riemann* pe un interval închis $[a,b]$. 4. Toate funcțiile *măsurabile Lebesgue* pe un interval I. 5. Toate funcțiile *integrabile Lebesgue* pe un interval I. 6. Toate funcțiile măsurabile Lebesgue pe un interval I, pentru care puterea p a valorii lor absolute este integrabilă Lebesgue pe I, unde $p \geqslant 1$. 7. Toate funcțiile *continue* pe un interval I. 8. Toate funcțiile *continue pe porțiuni* pe un interval închis $[a,b]$. (A se vedea [34], p.131.) 9. Toate funcțiile *netede pe porțiuni* pe un interval închis $[a,b]$. (A se vedea [34], p.131.) 10. Toate funcțiile care au derivate de ordinul k în fiecare punct al unui interval I, pentru orice k mai mic sau egal cu un întreg pozitiv dat n. 11. Toate funcțiile care au o derivată *continuă* de ordinul k pe un interval I, pentru orice k mai mic sau egal cu un întreg pozitiv dat n. 12. Toate funcțiile *indefinit derivabile* pe un interval I. 13. Toate *polinoamele* (*algebrice*) pe un interval I. 14. Toate polinoamele (algebrice) pe un interval I, de grad cel mult egal cu un întreg pozitiv dat n. 15. Toate *polinoamele trigonometrice* pe un interval I, de forma

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i \cos ix + \beta_i \sin ix, \tag{1}$$

unde n este arbitrar. 16. Toate polinoamele trigonometrice de forma (1), unde n este fixat. 17. Toate *funcțiile în scară* pe un interval închis $[a,b]$. 18. Toate *funcțiile constante* pe un interval I. 19. Toate funcțiile care satisfac o ecuație diferențială omogenă dată, ca de exemplu

$$\frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3} + \sin x \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + \mathrm{e}^x \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - xy = 0,$$

pe un interval I. Se mai pot obține încă 19 exemple de spații vectoriale peste $\boldsymbol{R}$ dacă considerăm că funcțiile din spațiile de mai sus sînt cu valori complexe.

Scanned with OKEN Scanner

În pofida rolului vital jucat de liniaritate în analiză, există mai multe clase importante de funcții cu valori reale care *nu* formează spații vectoriale. Cîteva din acestea sînt indicate în primele cinci exemple de mai jos; putem spune că următoarele spații de funcții cu variabilă reală, definite pe un interval dat, sînt neliniare: (*i*) toate funcțiile monotone pe $[a,b]$, (*ii*) toate funcțiile periodice pe $(-\infty, +\infty)$, (*iii*) toate funcțiile semicontinue pe $[a, b]$, (*iv*) toate funcțiile ale căror pătrate sînt integrabile Riemann pe $[a,b]$, (*v*) toate funcțiile ale căror pătrate sînt integrabile Lebesgue pe $[a,b]$.

Un spațiu S de funcții cu valori reale, definite pe un interval I, se numește **algebră** peste $\boldsymbol{R}$, dacă și numai dacă este închis atît față de combinațiile liniare cu coeficienți reali, cît și față de produse; adică, dacă și numai dacă S este un spațiu liniar peste $\boldsymbol{R}$, iar

$$f \in S,\ g \in S \Rightarrow fg \in S.$$

(Ca și în cazul spațiilor vectoriale, conceptul abstract de **algebră** este definit cu ajutorul axiomelor. A se vedea [22], vol. 2, pp.36, 225.) Ca o consecință a identității

$$fg = \frac{1}{4}(f+g)^2 - \frac{1}{4}(f-g)^2 \tag{2}$$

rezultă că un spațiu de funcții, care este un spațiu vectorial, este o algebră, atunci și numai atunci cînd este închis față de operația de ridicare la pătrat.

Un spațiu S de funcții cu valori reale, definite pe un interval I, este o **latice**, dacă și numai dacă este închis față de operațiile binare $\vee$(sup) și $\wedge$(inf) definite și notate:

superior de f și g: $f \vee g$, $(f \vee g)(x) = \max\ (f(x), g(x))$,

inferior de f și g: $f \wedge g$, $(f \wedge g)(x) = \min\ (f(x), g(x))$.

(Noțiunea abstractă de latice este definită axiomatic. A se vedea [9].) Pentru o funcție dată f cu valori reale, cele

Scanned with OKEN Scanner

două funcții nenegative f^+ și f^- sînt definite cu ajutorul lui f și al valorii sale absolute $|f|$ după cum urmează:

(3) $f^+ = f \vee 0, \qquad f^- = (-f) \vee 0,$

(4) $f = f^+ - f^-, \qquad |f| = f^+ + f^-,$

(5) $f^+ = \frac{1}{2}|f| + \frac{1}{2}f, \qquad f^- = \frac{1}{2}|f| - \frac{1}{2}f.$

Datorită acestor relații și următoarelor:

(6) $f \vee g = -[(-f) \wedge (-g)],$

(7) $f \wedge g = -[(-f) \vee (-g)],$

(8) $f \vee g = \frac{1}{2}(f+g) + \frac{1}{2}|f-g|,$

(9) $f \wedge g = \frac{1}{2}(f+g) - \frac{1}{2}|f-g|,$

un spațiu de funcții, care este un spațiu vectorial, este o latice, dacă și numai dacă este închis față de una *oricare* din următoarele cinci operații binare sau unare:

(10) $f \vee g,\ f \wedge g,$

(11) $f^+,\ f^-,\ |f|.$

Din exemplele de mai sus de spații vectoriale, 1—4, 7, 8, 17 și 18 sînt și algebre și latice, 14 (vezi Exemplul 6 de mai jos), 16 și 19 nu sînt nici algebre, nici latice. Spațiile din exemplele 9, 10, 11 (vezi Exemplul 7 de mai jos), 12, 13 și 15 sînt algebre, dar nu sînt latice. Spațiile din exemplele 5 (vezi Exemplul 8 de mai jos) și 6 sînt latice, dar nu sînt algebre.

1. Două funcții monotone a căror sumă nu este monotonă.

$$\sin x + 2x \quad \text{și} \quad \sin x - 2x \text{ pe } [-\pi,\pi].$$

Scanned with OKEN Scanner

2. Două funcții periodice a căror sumă nu este periodică.

$\sin x$ și $\sin \alpha x$, α irațional, pe $(-\infty, +\infty)$.

Dacă $\sin x + \sin \alpha x$ ar fi periodică, cu perioada p nenulă, atunci pentru orice x real ar avea loc următoarele identități:

$$\sin (x + p) + \sin (\alpha x + \alpha p) = \sin x + \sin \alpha x,$$

$$\sin (x + p) - \sin x = -[\sin (\alpha x + \alpha p) - \sin \alpha x],$$

$$\cos \left(x + \frac{1}{2} p\right) \sin \left(\frac{1}{2} p\right) = -\cos \left(\alpha x + \frac{1}{2} \alpha p\right) \sin \left(\frac{1}{2} \alpha p\right),$$

$$\cos x \sin \left(\frac{1}{2} p\right) = -\cos (\alpha x) \sin \left(\frac{1}{2} \alpha p\right).$$

Dacă se pune $x = \frac{\pi}{2}$, membrul stîng al ultimei ecuații se anulează. Deci, $\sin \frac{1}{2} \alpha p = 0$ și αp este un multiplu de 2π. Dacă se alege $x = \frac{1}{2\alpha} \pi$, membrul drept se anulează și rezultă $\sin \frac{1}{2} p = 0$, iar p este un multiplu de 2π. Deoarece α este irațional, faptul nu este posibil și s-a ajuns la contradicția dorită. (A se vedea [36], p.550, Nota).

3. Două funcții semicontinue, a căror sumă nu este semicontinuă.

Dacă

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{ dacă } x > 0, \\ 2, \text{ dacă } x = 0, \\ -1, \text{ dacă } x < 0, \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 1, \text{ dacă } x > 0, \\ -2, \text{ dacă } x = 0, \\ -1, \text{ dacă } x < 0, \end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

atunci $f(x)+g(x)$ nu este semicontinuă în $x=0$, deși $f(x)$ este peste tot superior semicontinuă, iar $g(x)$ este peste tot inferior semicontinuă.

Sînt posibile și exemple mai interesante, cînd fiecare din funcțiile f și g sînt semicontinue peste tot, dar *superior* semicontinue în unele puncte și *inferior* semicontinue în alte puncte. În exemplele următoare notația p/q va desemna o fracție ireductibilă, de întregi, cu $q>0$; numărul zero va fi reprezentat de $0/1$.

Dacă

$$f(x)=\begin{cases}1, \text{ dacă } x=p/q,\ q \text{ impar},\\ 0, \text{ în celelalte cazuri},\end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases}-1, \text{ dacă } x=p/q,\ q \text{ par},\\ 0, \text{ în celelalte cazuri},\end{cases}$$

atunci

$$f(x)+g(x)=\begin{cases}1, \text{ dacă } x=p/q,\ q \text{ impar}\\ -1, \text{ dacă } x=p/q,\ q \text{ par},\\ 0, \text{ dacă } x \text{ este irațional},\end{cases}$$

și funcția $f(x)+g(x)$ este semicontinuă, dacă și numai dacă x este rațional, deci *aproape nicăieri* (adică $f(x)+g(x)$ este nesemicontinuă aproape peste tot).

Să considerăm acum trei funcții definite în modul următor:

$$F(x)=\begin{cases}4/q, & \text{dacă } x=p/q,\ q \text{ impar},\\ -2\ -4/q, & \text{dacă } x=p/q,\ q \text{ par},\\ -2, & \text{dacă } x \text{ este irațional},\end{cases}$$

$$G(x)=\begin{cases}-1\ -(1/q), & \text{dacă } x=p/q,\ q \text{ impar},\\ 1+(1/q), & \text{dacă } x=p/q,\ q \text{ par},\\ -1, & \text{dacă } x \text{ este irațional}.\end{cases}$$

$$H(x)=\begin{cases}-1\ -(1/q), & \text{dacă } x=p/q,\ q \text{ impar}\\ 3+(1/q), & \text{dacă } x=p/q,\ q \text{ par},\\ 3, & \text{dacă } x \text{ este irațional}.\end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

Atunci fiecare din funcțiile F,G și H sînt semicontinue peste tot, în timp ce suma lor

$$F(x)+G(x)+H(x)=\begin{cases}-2+(2/q), & \text{dacă } x=p/q,\ q \text{ impar},\\ 2-(2/q), & \text{dacă } x=p/q,\ q \text{ par},\\ 0, & \text{dacă } x \text{ este irațional},\end{cases}$$

nu este *nicăieri* semicontinuă.

4. Două funcții ale căror pătrate sînt integrabile Riemann, dar pentru care pătratul sumei nu este integrabil Riemann.

Dacă

$$f(x)=\begin{cases}1, & \text{dacă } x \text{ este irațional},\\ -1, & \text{dacă } x \text{ este rațional},\end{cases}$$

și

$$g(x)=\begin{cases}1, & \text{dacă } x \text{ este algebric},\\ -1, & \text{dacă } x \text{ este transcendent},\end{cases}$$

atunci

$$f(x)+g(x)=\begin{cases}2, & \text{dacă } x \text{ este algebric și irațional},\\ 0, & \text{în celelalte cazuri}.\end{cases}$$

Atunci f^2 și g^2 sînt constante și deci integrabile pe orice interval închis (de exemplu, pentru precizare pe $[0,1]$), în timp ce $(f+g)^2$ este peste tot discontinuă și, deci, nu este integrabilă Riemann pe *nici* un interval, și, în particular, nu este integrabilă pe $[0,1]$.

5. Două funcții ale căror pătrate sînt integrabile Lebesgue, dar pentru care pătratul sumei nu este integrabil Lebesgue.

Fie E_1 o submulțime nemăsurabilă a lui $[0,1]$ și fie E_2 o submulțime nemăsurabilă a lui $[2,3]$. (A se vedea Capitolul 8, Exemplul 10.) Fie atunci

$$f(x)=\begin{cases}1, & \text{dacă } x\in[0,1]\cup E_2,\\ -1, & \text{dacă } x\in[2,3]\setminus E_2,\\ 0, & \text{în celelalte cazuri},\end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

și

$$g(x) = \begin{cases} 1, \text{ dacă } x \in [2,3] \cup E_1, \\ -1, \text{ dacă } x \in [0,1] \setminus E_1, \\ 0, \text{ în celelalte cazuri.} \end{cases}$$

Atunci

$$f(x) + g(x) = \begin{cases} 2, \text{ dacă } x \in E_1 \cup E_2, \\ 0, \text{ în celelalte cazuri.} \end{cases}$$

Atunci, întrucît

$$f^2(x) = g^2(x) = \begin{cases} 1, \text{ dacă } x \in [0,1] \cup [2,3], \\ 0, \text{ în celelalte cazuri,} \end{cases}$$

și

$$(f(x) + g(x))^2 = \begin{cases} 4, \text{ dacă } x \in E_1 \cup E_2, \\ 0, \text{ în celelalte cazuri,} \end{cases}$$

se deduce rezultatul, deoarece $E_1 \cup E_2$ nu este măsurabilă.

6. Un spațiu de funcții care este un spațiu liniar, dar nu este nici algebră, nici latice.

Polinoamele $cx + d$, de grad cel mult 1, de pe intervalul închis $[0,1]$ formează un spațiu liniar. Ele nu formează o algebră, deoarece pătratul elementului x nu este un element al spațiului. Ele nu formează nici o latice, deoarece $2x - 1$ este element al spațiului, dar $|2x - 1|$ nu este.

7. Un spațiu liniar de funcții care este o algebră, dar nu este o latice.

Mulțimea tuturor funcțiilor continuu diferențiabile pe $[0,1]$ formează o algebră, în virtutea formulei $(fg)' = fg' + f'g$. Totuși, ele nu formează o latice. Funcția

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ dacă } x = 0, \\ x^3 \sin 1/x, \text{ dacă } 0 < x \leqslant 1 \end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

este continuu diferențiabilă pe [0,1], dar valoarea ei absolută nu este diferențiabilă în mulțimea infinită de puncte în care $f(x) = 0$. În realitate $|f(x)|$ nu este nici măcar netedă pe porțiuni.

8. Un spațiu liniar de funcții care este o latice, dar nu este o algebră.

Mulțimea tuturor funcțiilor integrabile Lebesgue pe [0,1] este un spațiu vectorial și o latice. Totuși, acest spațiu nu este o algebră deoarece funcția

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x = 0, \\ x^{-1/2}, & \text{dacă } 0 < x \leqslant 1 \end{cases}$$

este un element al mulțimii, dar pătratul ei nu este.

9. Două metrici pentru spațiul $C([0,1])$ al funcțiilor continue pe [0,1], cu proprietatea că complementara sferei unitate în una din metrici este densă în sfera unitate față de cealaltă metrică.

Fie ρ și σ două metrici definite după cum urmează: Pentru $f, g \in C([0,1])$, fie

$$\rho(f,g) = \sqrt{\int_0^1 |f(x) - g(x)|^2 \, dx} = \|f - g\|_2;$$

$$\sigma(f,g) = \sup_{0 \leqslant x \leqslant 1} |f(x) - g(x)| = \|f - g\|_\infty.$$

Fie $P = \{f | \rho(f,0) \leqslant 1\}$, $\Sigma = \{f | \sigma(f,0) \leqslant 1\}$ sferele unitate în raport cu aceste două metrici. Evident, $\Sigma \subset P$. Vom arăta că complementara lui Σ este densă în P. Într-adevăr, fie

Scanned with OKEN Scanner

$f \in P$, $0 < \varepsilon < 1$. Dacă $\|f\|_\infty > 1$, atunci $f \notin \Sigma$ și ne putem opri aici. Dacă $\|f\|_\infty \leqslant 1$, fie $g(x)$ definită de:

$$g(x) = \begin{cases} 0, \text{ dacă } 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2} - \left(\frac{\varepsilon^2}{9}\right) \text{ sau } \frac{1}{2} + \frac{\varepsilon^2}{9} \leqslant x \leqslant 1, \\ 3, \text{ dacă } x = \frac{1}{2}, \\ \text{liniar în celelalte cazuri.} \end{cases}$$

Atunci $f(x)+g(x) \notin \Sigma$ și $\|f - (f+g)\|_2 = \|g\|_2 < \sqrt{9 \cdot \left(\frac{\varepsilon^2}{9}\right)} = \varepsilon$.

Acest ultim exemplu ilustrează o deosebire esențială între spațiile liniare normate cu dimensiune finită și cele cu dimensiune infinită. În oricare din cazuri sfera unitate închisă are proprietatea că orice dreaptă care trece prin origine (adică toți multiplii scalari ai unui punct dat, nenul) intersectează această sferă după un segment închis, avînd originea în centru. În cazul finit dimensional prin aceasta topologia este unic determinată. Exemplul de față arată că acest fapt nu este adevărat în cazul infinit dimensional.

Scanned with OKEN Scanner

Bibliografie

1. ALEXANDROV, P., HOPF H., *Topologie*, Springer, Berlin, 1935.
2. „American Mathematical Monthly", **68**, 1, Ianuarie, 1961, p. 28, Problema 3.
3. *Idem*, **70**, 6 (iunie—iulie), 1963, p. 674.
4. BANACH, S., *Théorie des opérations linéaires*, Warszawa, 1932.
5. BESICOVITCH, A.S., *Sur deux questions de l'intégrabilité*, „Journal de la Société des Math. et de Phys. à l'Univ., à Perm." **II**, 1920.
6. *Idem, On Kakeya's problem and a similar one*, „Math. Zeitschrift", **27**, 1928, pp. 312—320.
7. *Idem, On the definition and value of the area of a surface*, „Quarterly Journal of Mathematics" **16**, 1945, p. 86—102.
8. *Idem, The Kakeya problem*, Mathematical Association of America Film, Modern Learning Aids, New York, „American Mathematical Monthly", **70**, 7 (august-septembrie), 1963, pp. 697—706.
9. BIRKHOFF, G., *Lattice theory*, American Mathematical Society Colloquium Publications, 25 a, 1948.
10. BOAS, R.P., *A primer of real functions*, Carus Mathematical Monographs, No. 13, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1960.
11. BOURBAKI, N., *Eléments de mathématique*, Première partie
    I. *Théorie des ensembles*, Actualités scientifiques et industrielles, 846, Paris, 1939.
    II. *Topologie générale*, Chapters, I, II, IBID., 858, Paris, 1940.
    III. *Topologie générale*, Chapter III, IBID., 916—1143, Paris, 1951.
13. BROUWER, L.E.J., *Zur Analysis Situs*, „Math. Annalen", **68**, 1909, pp. 422—434.

Scanned with OKEN Scanner

14. CARATHÉODORY, C., *Vorlesungen über reelle Funktionen*, ed. II-a, G.B. Teubner, Leipzig, 1927.
15. DUNFORD, N., SCHWARTZ J., *Linear operators*, vol. I, Interscience Publishers New York, 1958.
16. GRAVES, L.M., *Theory of functions of real variables*, 2d ed., McGraw-Hill Book Company Inc., New York, 1956.
17. HALL, D., SPENCER G., *Elementary topology*, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1955.
18. HALMOS, P.R., *Measure theory*, D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, N.J., 1950.
19. HANCOCK, H., *Foundations of the theory of algebraic numbers*, Macmillan, New York, 1931.
20. HAUSDORFF, F., *Mengenlehre*, Dover Publications, New York, 1944.
21. HOBSON, E., W., *The theory of functions*, Harren Press, Washington, 1950.
22. JACOBSON, N., *Lectures in abstract algebra*, vol. I și II, D. Van Nostrand Company, Inc., New York, 1951.
23. KAKEYA, S., *Some problems on maximum and minimum regarding ovals*. „Tohoku Science Reports", **6**, Iulie, 1917, pp. 71—88.
24. KELLEY, J.L., *General topology*, D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, N.J., 1955.
25. KNASTER, B., KURATOWSKI C., *Sur les ensembles connexes*, „Fundamenta Mathematica", 2, 1921, pp. 201—255.
26. KOLMOGOROV, A.N., *On the representation of continuous functions of several variables by superposition of continuous functions of a smaller number of variables*, „Dokladî Akademii Nauk SSSR (N.S.)", **108**, 1956, pp. 179—182.
27. KURATOWSKI, C. *Topologie* **1**, Warszawa, 1933.
28. LEBESGUE H., *Leçons sur l'intégration*, Gauthier-Villars, Paris, 1904.
29. LOOMIS, L., *An introduction to abstract harmonic analysis*, D. van Nostrand Company, Inc., Princeton, N.J., 1953.
30. McSHANE, E.J., BOTTS T.A., *Real analysis*, D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, N. J., 1959.
31. MAZURKIEWICZ, S., „Comptes Rendus Soc. Sc. et Lettres de Varsovie", 7, 1914, pp. 322—383.
32. MUNROE, M.E., *Introduction to measure and integration*, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading. Mass. 1953.

Scanned with OKEN Scanner

33. NEWMAN, M.H.A., *Elements of the topology of plane sets of points*, Cambridge University Press, Cambridge, 1939.
34. OLMSTED, J.M.H., *Advanced calculus*, Appleton-Century-Crofts, Inc., New York, 1961.
35. *Idem*, *The real number system*, Appleton-Century-Crofts, Inc., New York, 1962.
36. *Idem*, *Real variables*, Appleton-Century-Crofts, Inc., New-York, 1956.
37. OSGOOD, W.F., *A Jordan curve of positive area*, „Trans. Amer. Math. Soc.", 4, 1903, pp. 107—112.
38. PASTOR, J.R., *Elementos de la teoria de functiones*, ed. III-a. Ibero-Americana, Madrid-Buenos Aires, 1953.
39. POLLARD, H., *The theory of algebraic numbers*, Carus Mathematical Monographs, No. 9, John Wiley and Sons Inc., New York 1950.
40. RADÓ, T., *Length and area*, American Mathematical Society Colloquium Publications, vol. XXX, New York, 1958.
41. ROBINSON, R.M., *On the decomposition of spheres*, „Fundamenta Mathematica", 34, 1947, pp. 246—266.
42. RUDIN, W., *Principles of mathematical analysis*, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1953.
43. SIERPINSKI, W., „Bull. Internat. Ac. Sciences Cracovie", 1911, p. 149.
44. *Idem*, *Sur un probleme concernant les ensembles mesurables superficiellement*, „Fundamenta Mathematica", 1, 1920, pp. 112—115.
45. SIERPINSKI, W., *General topology*, University of Toronto Press, Toronto, 1952.
46. *Idem*, *Cardinal and ordinal numbers*, Varşovia, 1958.
47. STEINITZ, E., *Bedingte konvergente Reigen und konvexe Systeme*, „Journal fur Mathematik", 143, 1913, pp. 128—175.
48. TITCHMARSH, E.C., *The theory of functions*, Oxford University Press, Oxford, 1932.
49. TOEPLITZ, O., *Über allgemeine lineare Mittelbildungen*, „Prace Matematyczne-Fizyczne", 22, 1911, pp. 113—119.
50. VAIDYANATHASWAMY, R., *Treatise on set topology*, Partea I-a, Indian Mathematical Society, Madras, 1947.
51. VON NEUMANN, J., *Zur Algebra der Funktionaloperationen und Theorie der normalen Operatoren*, „Math. Analen", 102, 1930, pp. 370—427.
52. ZYGMUND, A., *Trigonometrical series*, Varşovia, 1935.
53. *Idem*, *Trigonometric series*, vol. I. Cambridge University Press, Cambridge, 1959.

Scanned with OKEN Scanner

Index

Abel, N. H. 118
acoperire 57
  — deschisă 57, 222
adunare 39
algebră 245
aplicaţie continuă 46, 225
  — deschisă 191
  — închisă 192
  — topologică 225
aproape peste tot 81
arc 191
  — care umple un pătrat 195
  — simplu 191
arhimedean 49
arie 213
  — a unei suprafeţe 219
  — exterioară 213
  — interioară 213
axioma alegerii 135

Baire, R. 142
Banach, S. 247
Bază 223
  — Hamel 72
Besicovitch, A. S. 220

Cantor, G. 136
categoria unei mulţimi
  — a doua 142
  — întîi 142
centrul unei vecinătăţi sferice 224
circuit plan 193
cîmp 39
  — complet ordonat 43
  — ordonat 40
  — — arhimedean 49
  — — nearhimedean 49
  — vectorial 187
  — — solenoidal 187
clase de echivalenţă 135
  — — de şiruri Cauchy 51
compact 57
comparare (favorabilă) 108
complementară 36
completarea măsurii Borel 134
completitudine Cauchy 51
componentă 36
compunere (a două funcţii) 38
condensare, a singularităţilor 68
  — , punct de 147
conex 190
conexiune simplă 187
congruent 242
continuitate absolută 134
convergenţă 47, 93, 95, 223
  — aproape peste tot 166
  — dominată 96, 166
  — în măsură 166
  — în medie 166
  — uniformă 59, 125

Scanned with OKEN Scanner

subspaţiu 222
suma unei serii convergente 95
şir 46
— Cauchy 47, 225
— convergent 47
— — de funcţii 93
— — — mulţimi 93
— divergent 47
— — de funcţii 93
— — — mulţimi 93

Tarski, A. 242
teorema bunei ordonări 135
— categoriei a lui Baire 142
— fundamentală a analizei 75
— — — inducţiei 44
— Heine-Borel 57
teorema lui Dini 132
— — Jordan 191
— — Mertens 106
— — Riemann de rearanjare 97
— — Rolle 54
— — Stokes 188
— Moore-Osgood 178
— Radon-Nikodym 169
— seriilor alternate 99
— Stone-Weierstrass 122
termenul unui şir 47
Toeplitz, O. 110
topologie 222
— discretă 223
— generată 223
— indusă 222
— mai slabă 223
— mai tare 223
— moştenită 222
— slabă 231
— tare 231
total discontinuu 190
transformarea Fourier 112
translaţie
— modulo 1 145

Unitate 40
universul discursului 36
unu 40

Valoare absolută 41
— principală (Cauchy) 85
valoarea unei funcţii 36
van der Waerden, B.L. 78
vecinătate 42, 224
— punctată 42
— sferică 224
vector 225
von Neumann, J. 242

Weierstrass, K.W.T. 78

Zaanen, A.C. 161
zero 40

Scanned with OKEN Scanner

Redactor: MARIA BORICEAN
Tehnoredactor: ADRIAN MORARU

Coli de tipar 16,50
Tirajul: 7.850 ex. Bun de tipar: 03.XII.1973

Tiparul executat sub comanda nr. 984
la Întreprinderea poligrafică „13 Decembrie 1918"
București, 1973
Republica Socialistă România

Scanned with OKEN Scanner